Reti di Petri e semantiche ad ordini parziali: i processi non sequenziali

Lucia Pomello

Dipartimento di informatica, sistemistica e comunicazione
Università degli studi di Milano–Bicocca

Il comportamento dei sistemi elementari

Sia $\Sigma = (B, E, F; c_{in})$ un sistema elementare, $c_i \in C_\Sigma$, $e_i \in E$

- comportamento sequenziale - sequenze di occorrenze / di eventi ("**interleaving**", simulazione sequenziale non deterministica)
  $c_{in}[e_1 > c_1[e_2 > \ldots [e_n > c_n$ oppure $c_{in}[e_1 e_2 \ldots e_n > c_n$

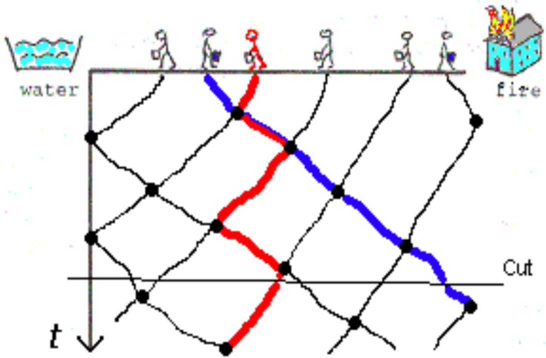
- comportamento non sequenziale - sequenze di passi ("**step semantics**")
  $c_{in}[U_1 > c_1[U_2 > \ldots [U_n > c_n$ oppure $c_{in}[U_1 U_2 \ldots U_n > c_n$

- comportamento non sequenziale - processi non sequenziali ("**partial order semantics**")
  ...

Si considerano sia sequenze finite che sequenze infinite (di eventi o di passi)

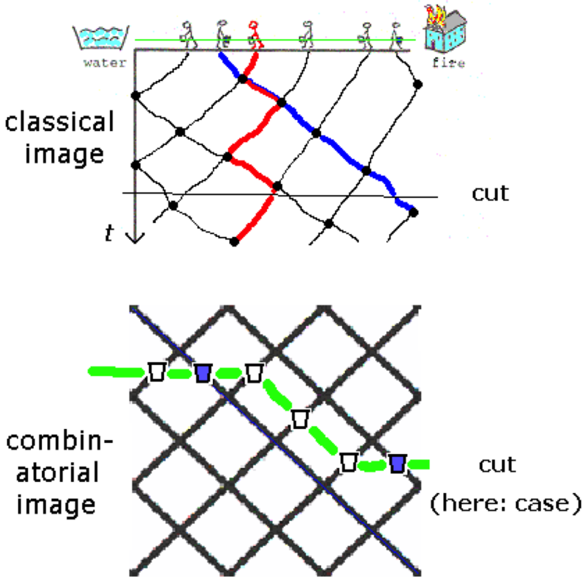
Nets, Time and Space

from: Theoretical Computer Science 153 (1996) 3-48



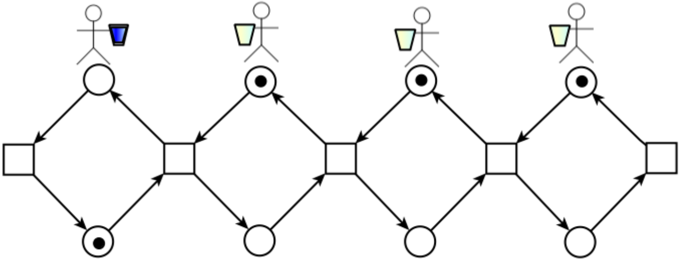
This is a snapshot of a fire-bucket chain, and a recording of movements over Time. In the record, we see variable speeds which we could measure.

C. A. Petri

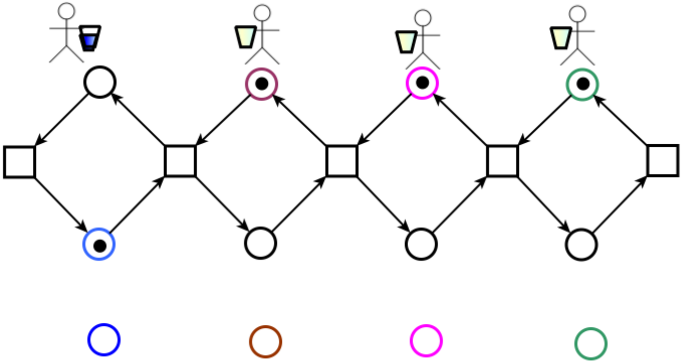

water
fire
classical image
cut
t
combin-atorial image
cut
(here: case)

C. A. Petri

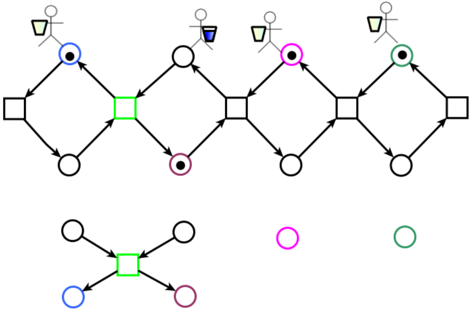
il sistema anti-incendio



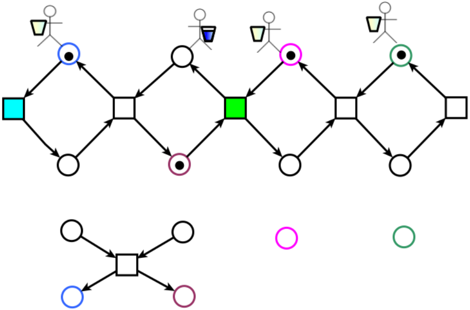
il processo anti-incendio



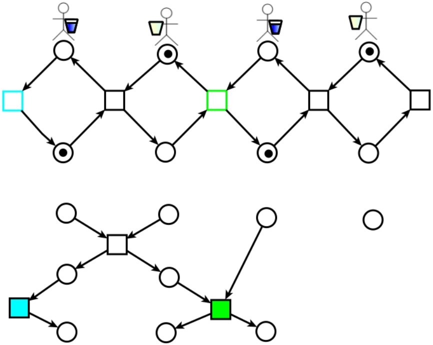
il processo anti-incendio



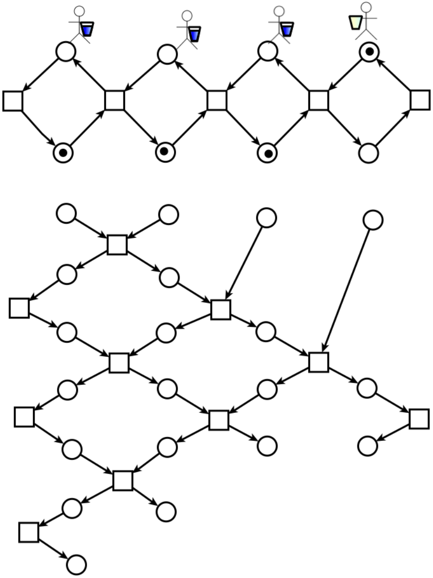
il processo anti-incendio



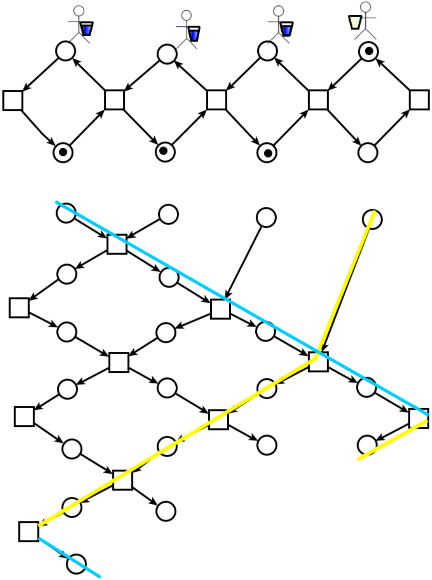
il processo anti-incendio



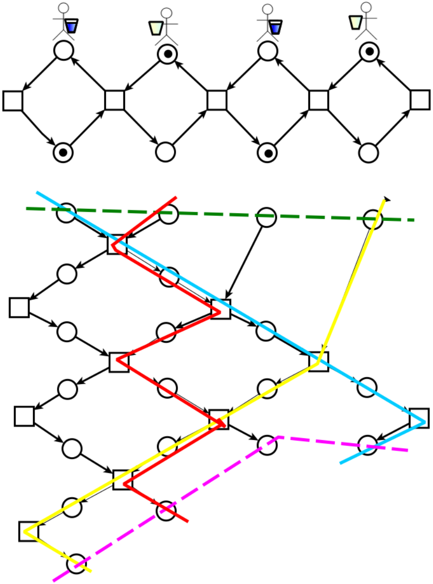
il processo anti-incendio



sottoprocessi: la storia dei secchi



sottoprocessi: la storia di un vigile



$N = (B, E, F)$ rete causale (rete di occorrenze senza conflitti)

(i) $\forall b \in B : |{}^{\bullet}b| \leq 1 \ \wedge \ |b^{\bullet}| \leq 1$: NO CONFLITTI

(ii) $\forall x, y \in B \cup E : (x, y) \in F^{+} \Rightarrow (y, x) \notin F^{+}$: NO CICLI

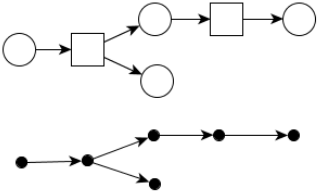
(iii) $\forall e \in E : \{x \in B \cup E \mid xF^{*}e\}$ è FINITO

(La rete può essere **infinita**)

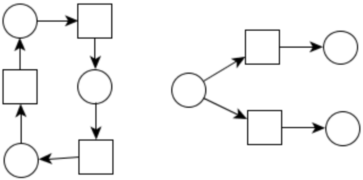
Ad una rete causale è possibile associare un ordine parziale

$$(X, \leq) = (B \cup E, F^{*})$$

rete causale



e ordine parziale associato

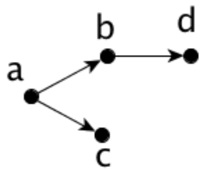


NO, **non** sono reti causali

reti causali e ordini parziali : relazioni

Sia $N = (B, E, F)$ una **rete causale** e $(X, \leq)$ l'**ordine parziale** associato $(X = (B \cup E)$ e $\leq\ = F^*)$, allora

- $x, y \in X$: x, y elementi che occorrono nella storia di X
- $x \leq y$: x causa y,
- x **li** y : $x \leq y$ or $y \leq x$ - x e y sono causalmente dipendenti
- x **co** y : **not**$(x < y)$ and **not**$(y < x)$ - x e y sono causalmente indipendenti



- b **co** c , c **co** d ma not(b **co** d)
- c **li** a , a **li** d ma not(c **li** d)
- **li** e **co** *simmetriche*
- **li** e **co** **non transitive**
- **li** e **co** *riflessive*

relazioni su ordini parziali

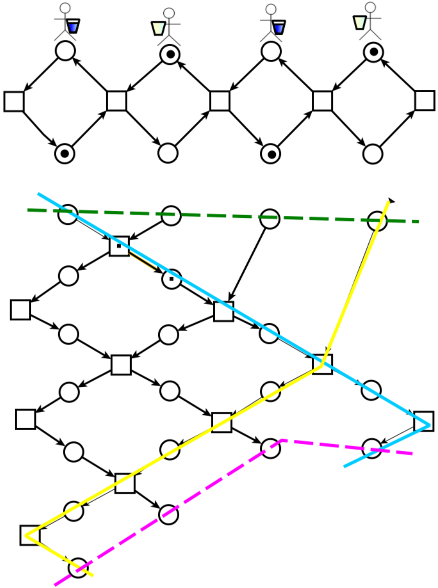
$N = (B, E, F)$ rete causale, $(X = B \cup E, \leq)$ ordine parziale

- $C \subseteq X$ co-set sse $\forall x, y \in C : x$ **co** y
- $C \subseteq X$ taglio sse co-set massimale $(\forall z \in X \setminus C\ \exists v \in C : z$ **li** $v)$
- $L \subseteq X$ li-set sse $\forall x, y \in L : x$ **li** y
- $L \subseteq X$ linea sse li-set massimale $(\forall z \in X \setminus L\ \exists v \in L : z$ **co** $v)$

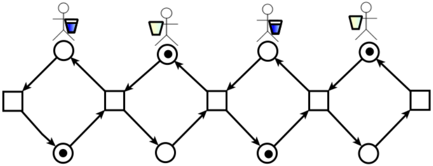
NOTA
In un **co**-set la relazione **co** è **transitiva**;
in un **li**-set la relazione **li** è **transitiva**.

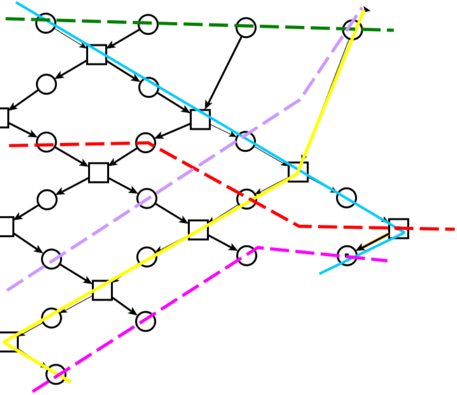
Un taglio $C \subseteq X$ è detto B-taglio se $C \subseteq B$.

linee e tagli nel processo anti-incendio



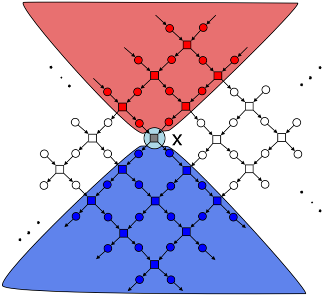
linee e tagli nel processo anti-incendio





passato e futuro - "il cono di luce"

$N = (B, E, F)$ rete causale
$x \in X$, past(x) e future(x)



K-densità

$N = (B, E, F)$ rete causale, $(X = (B \cup E, \leq)$ ordine parziale

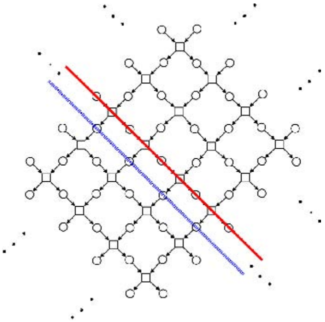
N è K-densa sse

$$\forall h \in Linee(N), \forall c \in Tagli(N) : |h \cap c| = 1$$

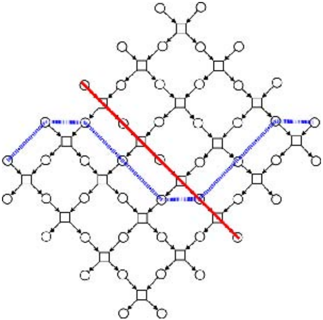
dove $Linee(N)$ e $Tagli(N)$ sono gli insiemi delle linee e dei tagli di N.

Nota: Se N è finita, N è K-densa.

K-densità: esempi

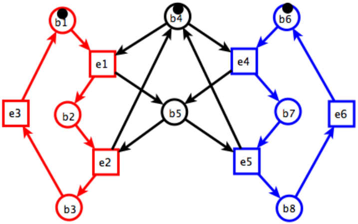


N è **non** K-densa

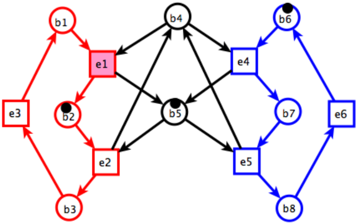


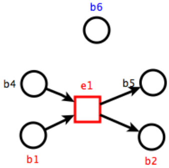
N è K-densa

processi del sistema mutua esclusione

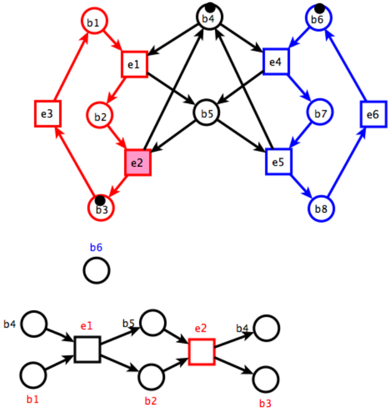


processi del sistema mutua esclusione

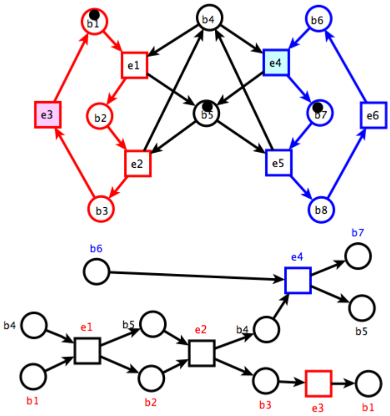




processi del sistema mutua esclusione



processi del sistema mutua esclusione



processi non sequenziali (di sistemi finiti)

Sia $\Sigma = (S, T, F, c_{in})$ un sistema elementare **senza contatti** e **finito**, tale cioè che $S \cup T$ sia **finito**.
$< N = (B, E, F); \phi >$ è un processo non sequenziale di Σ sse

- (B, E, F) è una **rete causale** (si ammettono condizioni isolate)
- $\phi : B \cup E \to S \cup T$ è una mappa :

  (1) $\phi(B) \subseteq S$, $\phi(E) \subseteq T$

  (2) $\forall x_1, x_2 \in B \cup E : \; \phi(x_1) = \phi(x_2) \; \Rightarrow \; (x_1 \leq x_2)$ or $(x_2 \leq x_1)$

  (3) $\forall e \in E : \; \phi({}^\bullet e) = {}^\bullet\phi(e)$ and $\phi(e^\bullet) = \phi(e)^\bullet$

  (4) $\phi(Min(N)) = c_{in}$.

  dove $Min(N) = \{x \in B \cup E \mid \nexists y : (y, x) \in F\}$ (stati locali iniziali)

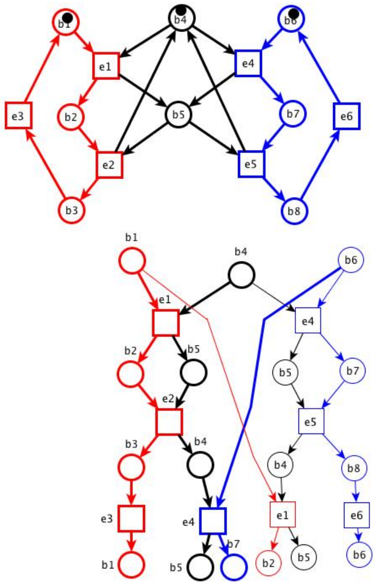
i B-tagli corrispondono ai casi raggiungibili

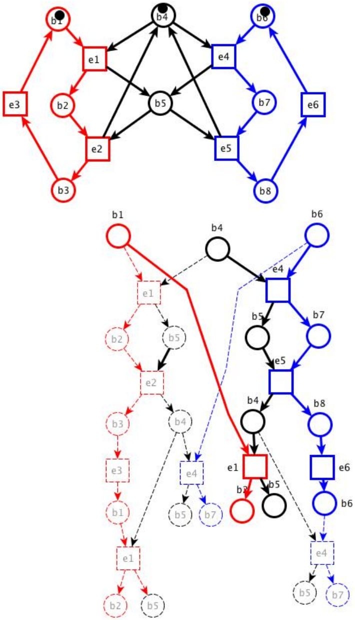
Se $< N = (B, E, F); \phi >$ è un **processo non sequenziale** di $\Sigma = (S, T, F, c_{in})$, sistema elementare **finito** e senza contatti allora

$$\boxed{N = (B, E, F) \text{ é } \textbf{K-densa}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall K \subseteq B,\ K \text{ B-taglio di } N \text{ é tale che: } K \text{ é } \textbf{finito} \ \ \textit{and} \\ \exists c \in C_\Sigma :\ \phi(K) = c \end{array}}$$

processo ramificato del sistema "mutua esclusione"





Piú processi sono modellati da un'unica rete con *conflitti in avanti*

(processi ramificati): *reti di occorrenze*

$N = (B, E, F)$ è una **rete di occorrenze** sse

(i) $\forall b \in B : |{}^\bullet b| \leq 1$: CONFLITTI solo in avanti

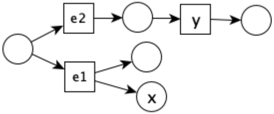
(ii) $\forall x, y \in B \cup E : (x, y) \in F^+ \Rightarrow (y, x) \notin F^+$: no cicli

(iii) $\forall e \in E : \{x \in B \cup E \mid xF^*e\}$ è finito

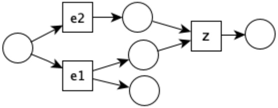
(iv) la relazione di *conflitto* $\#$ **non** è riflessiva

Dove la relazione $\# \subseteq X \times X$ $(X = B \cup E)$ è definita come segue:

$$x\#y \text{ sse } \exists e_1, e_2 \in E : {}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 \neq \emptyset \wedge e_1 \leq x \wedge e_2 \leq y.$$



rete di occorrenze



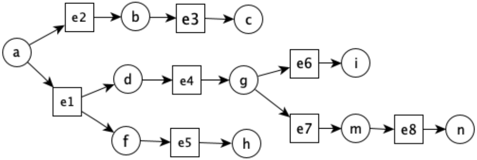
non è una rete di occorrenze

$z\#z$

É ancora possibile associare ad N un ordine parziale $(X, \leq) = (B \cup E, F^*)$

reti di occorrenze, ordini parziali e relazioni ($\#$, **li** e **co**)

$N = (B, E, F)$ rete di occorrenze, $(X, \leq)$ ordine parziale associato, $x, y \in X$
- x **li** y sse $x \leq y$ or $y \leq x$
- $x \# y$ sse (si veda la pag precedente)
- x **co** y sse **not**$(x < y)$ and **not**$(y < x)$ and **not**$(y \# x)$



- esempi di elementi in relazione di conflitto $\#$:
  $e_1 \# e_2$; $e_3 \# e_4$; $c \# e_4$; $c \# h$; $e_6 \# e_8$; ...

conflitto $\#$ è simmetrica, **non** è transitiva

- esempi di elementi in relazione **li**:
  e_1 **li** e_7; e_1 **li** i; a **li** e_3; ...

- esempi di elementi in relazione **co**:
  e_4 **co** e_5; e_5 **co** e_6; e_5 **co** e_7; h **co** e_8; ...

processi ramificati (di sistemi finiti)

Sia $\Sigma = (S, T, F, c_{in})$ un sistema elementare **senza contatti** e **finito**.

$< N = (B, E, F); \phi >$ è un processo ramificato di Σ sse

- (B, E, F) è una **rete di occorrenze** (si ammettono condizioni isolate)
- $\phi : B \cup E \to S \cup T$ è una mappa :

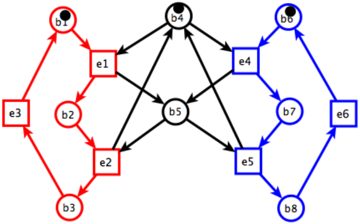
(1) $\phi(B) \subseteq S$, $\phi(E) \subseteq T$

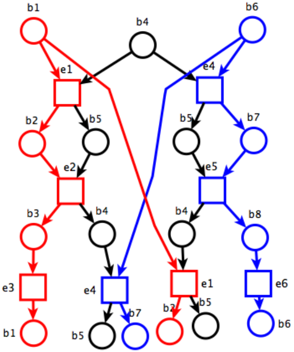
(2') $\forall e_1, e_2 \in E :\ ({}^\bullet e_1 = {}^\bullet e_2 \wedge \phi(e_1) = \phi(e_2)) \ \Rightarrow\ e_1 = e_2$

(3') $\forall e \in E :$ la restrizione di ϕ a ${}^\bullet e$ è una biiezione tra ${}^\bullet e$ e ${}^\bullet \phi(e)$ e
la restrizione di ϕ a $e^\bullet$ è una biiezione tra $e^\bullet$ e $\phi(e)^\bullet$

(4') la restrizione di ϕ a $Min(N)$ è una biiezione tra $Min(N)$ e c_{in}.

un processo ramificato del sistema "mutua esclusione"





processi non sequenziali vs ramificati

$\Sigma = (S, T, F, c_{in})$ sistema elementare **senza contatti** e **finito**.
$< N = (B, E, F); \phi >$ è un processo non sequenziale di Σ sse
* (B, E, F) è una **rete causale** (si ammettono condizioni isolate)
* $\phi : B \cup E \rightarrow S \cup T$ è una mappa :

(1) $\phi(B) \subseteq S$, $\phi(E) \subseteq T$

(2) $\forall x_1, x_2 \in B \cup E : \ \phi(x_1) = \phi(x_2) \ \Rightarrow \ (x_1 \leq x_2)$ or $(x_2 \leq x_1)$

(3) $\forall e \in E : \ \phi({}^\bullet e) = {}^\bullet\phi(e)$ and $\phi(e^\bullet) = \phi(e)^\bullet$

(4) $\phi(Min(N)) = c_{in}$.

$< N = (B, E, F); \phi >$ è un processo ramificato di Σ sse
* (B, E, F) è una **rete di occorrenze** (si ammettono condizioni isolate)
* $\phi : B \cup E \rightarrow S \cup T$ è una mappa :

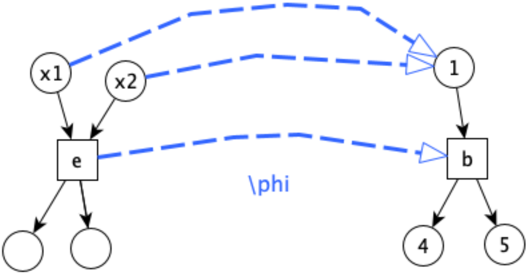
(1) $\phi(B) \subseteq S$, $\phi(E) \subseteq T$

(2') $\forall e_1, e_2 \in E : \ (\ {}^\bullet e_1 = {}^\bullet e_2 \wedge \phi(e_1) = \phi(e_2) \ ) \ \Rightarrow \ e_1 = e_2$

(3') $\forall e \in E :$ la restrizione di ϕ a ${}^\bullet e$ è una biiezione tra ${}^\bullet e$ e ${}^\bullet\phi(e)$ e
la restrizione di ϕ a $e^\bullet$ è una biiezione tra $e^\bullet$ e $\phi(e)^\bullet$

(4') la restrizione di ϕ a $Min(N)$ è una biiezione tra $Min(N)$ e c_{in}.

$(2) \wedge (3) \Rightarrow (3')$
$(2) \wedge (4) \Rightarrow (4')$



questa ϕ soddisfa (3): $\phi(^\bullet e) = {}^\bullet\phi(e)$

ma **non** (2): $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ ma x_1 **co** x_2

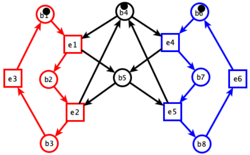
e **non** (3'): non c'è corrispondenza biunivoca tra $^\bullet e = \{x_1, x_2\}$ e $^\bullet(\phi(e)) = \{1\}$

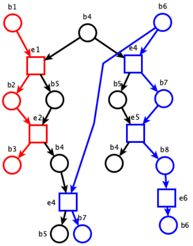
Un processo non sequenziale può essere definito anche richiedendo che ϕ soddisfi: $(1), (2), (3')$ e $(4')$

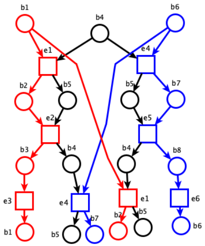
prefisso

Sia $\Sigma = (S, T, F, c_{in})$ un sistema elementare *finito* e *senza contatti* e siano $\Pi_1 =< N_1; \phi_1 >, \Pi_2 =< N_2; \phi_2 >$ *processi ramificati* di Σ.

$\Pi_1 =< N_1; \phi_1 >$ è un **prefisso** di $\Pi_2 =< N_2; \phi_2 >$ sse
N_1 è una *sottorete* di N_2 e $\phi_{2|N_1} = \phi_1$ (ϕ_2 "ristretto" a N_1 è uguale a ϕ_1).







$\Pi_1 =< N_1; \phi_1 >$ **prefisso** di $\Pi_2 =< N_2; \phi_2 >$

prefissi e unfolding

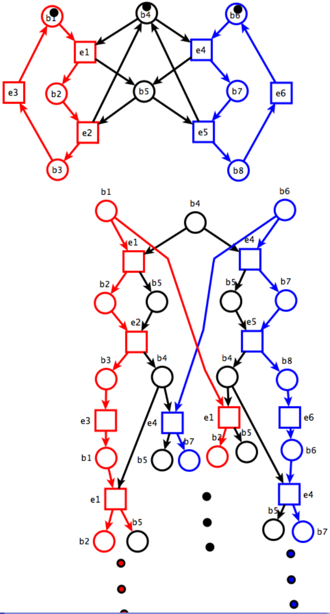
Σ ammette un *unico* processo ramificato che è *massimale* rispetto alla relazione di prefisso tra processi.

Tale processo massimale è chiamato *unfolding* di Σ, denotato $Unf(\Sigma)$.

Un processo non sequenziale è un processo ramificato $\Pi =< N; \phi >$ tale che N sia una rete causale (senza conflitti), tale processo è chiamato anche **corsa (run)**.

Inoltre ogni processo non sequenziale di Σ è un prefisso dell'unfolding $Unf(\Sigma)$.

unfolding del sistema "mutua esclusione"



prefisso finito di un unfolding