Capitolo 5 - Elementi di onde nei plasmi

1 Oscillazioni di plasma in presenza di collisioni

Si consideri un plasma uniforme di ioni (i) ed elettroni (e), con temperatura supposta nulla e in presenza di collisioni descritte da una forza del tipo $-m_s n_s \nu \mathbf{u_s}$, dove m_s, n_s e $\mathbf{u_s}$ sono, rispettivamente, la massa, densità e velocità fluida delle specie s, mentre ν indica la frequenza di collisione. Combinando opportunamente le equazioni di continuità, di conservazione del momento lineare e il teorema di Poisson, nell'ambito della teoria lineare a due fluidi, mostrare che il plasma supporta oscillazioni smorzate alla frequenza di plasma $\omega_P^2 \approx \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$ e con una costante temporale di smorzamento dell'oscillazione $\tau = 2/\nu$. Si supponga $\nu << \omega_P$.

2 Energia delle onde elettromagnetiche in un plasma uniforme e senza campo magnetico

L'energia media $\bar{W}$ di un'onda elettromagnetica che propaga in un plasma uniforme e privo di campo magnetico è descritta dall'espressione

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \bar{E_1^2} + \frac{\bar{B_1}^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\rho_e \bar{u_1^2} = \bar{W_E} + \bar{W_B} + \bar{W_M} \tag{1}$$

dove E_1 e B_1 sono i campi elettrico e magnetico dell'onda, ρ_e è la densità di massa degli elettroni e u_1 è la velocità fluida degli elettroni. Come indicato dalla relazione sopra, l'energia si compone di tre contributi, dovuti ad E_1, B_1 ed u_1 ed indicati dalle espressioni W_E, W_B e W_M.
Usando l'equazione di conservazione del momento, la legge di Faraday e la relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche in un plasma con le caratteristiche sopra descritte, mostrare che

- $\bar{W_E} = \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2}\bar{W_M}$
- $\bar{W_B} = \left(\frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} - 1\right)\bar{W_M}$

dove ω indica la frequenza angolare dell'onda e ω_{Pe} la frequenza angolare di plasma degli elettroni. Mostrare quindi che

- $\bar{W_M} = \frac{1}{2}\frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2}\bar{W}$
- $\bar{W_E} = \frac{1}{2}\bar{W}$
- $\bar{W_B} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2}\right)\bar{W}$

A cosa si riducono le tre espressioni sopra nel limite $\omega >> \omega_{Pe}$? Giustificare la risposta da un punto di vista fisico.

3 Riflettometria

Per lo studio del profilo di densità degli elettroni nella ionosfera, vengono usati pacchetti di onde elettromagnetiche di breve durata. Questi sono riflessi quando raggiungono la densità critica (cioè la densità a cui avviene la riflessione dell'onda) e viene misurato il tempo intercorso dal lancio del pacchetto al suo ritorno a terra. Si assuma che la densità degli elettroni cresca linearmente tra 0 e 2×10^{11} m^{-3} tra le altitudini di 120 km e 220 km.

- Calcolare la massima frequenza dell'onda necessaria a sondare l'intero profilo di densità elettronica.
- Mostrare che il tempo di viaggio t_g del pacchetto nella ionosfera con la velocità di gruppo v_g, ovvero $t_g = \int ds/v_g$, si può scrivere come $t_g = \frac{1}{c} \int ds \, (1 - n(s)/n_c)^{-1/2}$, dove n_c è la densità critica associata all'altitudine fino a cui si vuole sondare. ds indica un elemento infinitesimo lungo la traiettoria dell'onda e $n(s)$ è la densità elettronica in un particolare punto della traiettoria dell'onda.
- Calcolare t_g nel caso in cui si voglia sondare l'intero profilo di densità elettronica e trovare quindi il tempo totale per raggiungere la sommità della ionosfera, ovvero t_g maggiorato del tempo di propagazione necessario all'onda per raggiungere l'inizio della ionosfera.