Insiemi parzialmente ordinati

Relazione d'ordine parziale su A: $\leq \quad \subseteq \quad A \times A$

(1) riflessiva: $x \leq x$ per ogni x in A

(2) antisimmetrica: $(x \leq y \wedge y \leq x) \Longrightarrow x = y$, per ogni x e y in A

(3) transitiva: $(x \leq y \wedge y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$, per ogni x, y e z in A

Notazione:
$x \geq y$ significa $y \leq x$; $x < y$ significa $(x \leq y \wedge x \neq y)$; $y > x \ldots$

Insiemi parzialmente ordinati

(1) Qual è la più piccola relazione d'ordine parziale su A?

(2) Estensione di una relazione d'ordine parziale

(3) Relazione d'ordine totale

(4) Estensione lineare di un ordine parziale

Insiemi parzialmente ordinati

Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, e $B \subseteq A$

$x \in A$ è un maggiorante di B se $y \leq x$ per ogni y in B

$x \in A$ è un minorante di B se $x \leq y$ per ogni y in B

Insiemi parzialmente ordinati

Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, e $B \subseteq A$

$x \in A$ è un maggiorante di B se $y \leq x$ per ogni y in B

$x \in A$ è un minorante di B se $x \leq y$ per ogni y in B

Indichiamo con B^* l'insieme dei maggioranti di B

Indichiamo con B_* l'insieme dei minoranti di B

B si dice limitato superiormente se $B^* \neq \emptyset$

B si dice limitato inferiormente se $B_* \neq \emptyset$

Insiemi parzialmente ordinati

$x \in B$ è il minimo di B se $x \leq y$ per ogni y in B

$x \in B$ è il massimo di B se $y \leq x$ per ogni y in B

Insiemi parzialmente ordinati

$x \in B$ è il minimo di B se $x \leq y$ per ogni y in B

$x \in B$ è il massimo di B se $y \leq x$ per ogni y in B

$x \in B$ è minimale in B se $y \leq x$ implica $y = x$

$x \in B$ è massimale in B se $x \leq y$ implica $y = x$

Insiemi parzialmente ordinati

Se x è il minimo di B^*, diciamo che x è l'estremo superiore (join) di B, e scriviamo $x = \sup B$, o anche $x = \bigvee B$

Se x è il massimo di B_*, diciamo che x è l'estremo inferiore (meet) di B, e scriviamo $x = \inf B$ o anche $x = \bigwedge B$

In particolare, se $B = \{x, y\}$, scriveremo $x \vee y$ per indicare $\bigvee B$, se esiste, e $x \wedge y$ per $\bigwedge B$, se esiste

Insiemi parzialmente ordinati

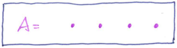
Esempi:

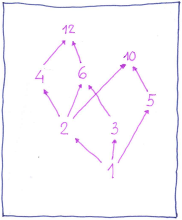
(1) $(2^A, \subseteq)$ dove A è un insieme qualsiasi

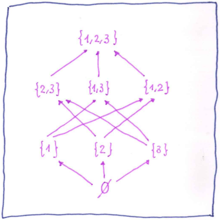
(2) $(\mathbb{N}^+, |)$ dove $|$ indica la relazione *divide* (ad es. $3 \mid 27$, $5 \not| 27$)

(3) $([\mathrm{FBF_{LP}}]_\equiv, \longrightarrow)$

Insiemi parzialmente ordinati







Reticoli

Un reticolo è un insieme parzialmente ordinato $(L, \leq)$, tale che, per ogni $x, y \in L$, esistono $x \vee y$ e $x \wedge y$

Reticoli

Un reticolo è un insieme parzialmente ordinato $(L, \leq)$, tale che, per ogni $x, y \in L$, esistono $x \vee y$ e $x \wedge y$

Un reticolo si dice completo se $\bigvee B$ e $\bigwedge B$ esistono per ogni $B \subseteq L$

Insiemi parzialmente ordinati e funzioni monotòne

Siano $(A, \leq)$ e $(B, \leq)$ due insiemi parzialmente ordinati

Una funzione $f : A \to B$ si dice monotòna se, per ogni coppia di elementi $x, y \in A$, vale

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Funzioni e punti fissi

Consideriamo funzioni $f : X \to X$

Un elemento $x \in X$ è un punto fisso di f se $f(x) = x$

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ Insieme dei punti fissi: $\{0, 1\}$

(2) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log(x)$ Insieme dei punti fissi: $\emptyset$

(3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$ Insieme dei punti fissi: $\mathbb{R}$

Funzioni monotòne e punti fissi

Se $(A, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato, e $f : A \to A$ è una funzione monotòna, possiamo chiederci se esistano un minimo e un massimo punto fisso

Consideriamo $(2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$ e $S \subseteq \mathbb{N}$

(1) $f(S) = S \cup \{2, 7\}$

Funzioni monotòne e punti fissi

Se $(A, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato, e $f : A \to A$ è una funzione monotòna, possiamo chiederci se esistano un minimo e un massimo punto fisso

Consideriamo $A = 2^{\mathbb{N}}$ e $S \subseteq \mathbb{N}$

(2) $f(S) = S \cap \{2, 7, 8, 12, 21\}$

Teorema di Knaster-Tarski

Sia $(L, \leq)$ un reticolo completo, e $f : L \to L$ sia una funzione monotòna. Allora f ha un minimo e un massimo punto fisso.

Caso particolare: $L = 2^A$, per un insieme A

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Dimostriamo il teorema nel caso particolare,

$$L = 2^A \qquad f : 2^A \longrightarrow 2^A, \text{ monotòna}$$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Costruiamo l'insieme $\boxed{Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}}$

Gli elementi di Z saranno chiamati punti pre-fissi

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Costruiamo l'insieme $\boxed{Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}}$

Gli elementi di Z saranno chiamati punti pre-fissi

L'insieme Z non può essere vuoto. Perché?

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}$

Gli elementi di Z saranno chiamati punti pre-fissi

Osservazione: se f ha dei punti fissi, Z li contiene tutti

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}$

Gli elementi di Z saranno chiamati punti pre-fissi

Poniamo $m = \bigcap Z$

Teorema di Knaster-Tarski dimostrazione

Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}$

Gli elementi di Z saranno chiamati punti pre-fissi

Poniamo $m = \bigcap Z$

Per ogni S in Z, $m \subseteq S$, quindi

$$f(m) \subseteq f(S)$$

Teorema di Knaster-Tarski dimostrazione

Costruiamo l'insieme $Z = \{T \subseteq A \mid f(T) \subseteq T\}$

Gli elementi di Z saranno chiamati punti pre-fissi

Poniamo $m = \bigcap Z$

Per ogni S in Z, $m \subseteq S$, quindi

$$f(m) \subseteq f(S) \subseteq S$$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Per ogni S in Z, $f(m) \subseteq S$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Per ogni S in Z, $f(m) \subseteq S$

quindi $f(m) \subseteq \bigcap Z = m$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Per ogni S in Z, $f(m) \subseteq S$

quindi $f(m) \subseteq \bigcap Z = m$

quindi $\boxed{m \in Z}$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

Per ogni S in Z, $f(m) \subseteq S$

quindi $f(m) \subseteq \bigcap Z = m$

quindi $m \in Z$

Osservazione: $m = \min Z$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

$$f(m) \subseteq m$$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

$$f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$$

f è monotòna, quindi

$$f(f(\mathfrak{m})) \subseteq f(\mathfrak{m})$$

Teorema di Knaster-Tarski – dimostrazione

$$f(m) \subseteq m$$

f è monotòna, quindi

$$f(f(m)) \subseteq f(m)$$

Allora, $f(m) \in Z$, quindi $m \subseteq f(m)$

Teorema di Kleene

Sia $f : 2^A \to 2^A$ monotòna

La funzione f si dice continua se

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_i \subseteq \cdots$$

$$f(X_1) \subseteq f(X_2) \subseteq \cdots \subseteq f(X_i) \subseteq \cdots$$

Teorema di Kleene

Sia $f : 2^A \to 2^A$ monotòna

La funzione f si dice continua se

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_i \subseteq \cdots$$

$$f(X_1) \subseteq f(X_2) \subseteq \cdots \subseteq f(X_i) \subseteq \cdots$$

$$\boxed{f(\bigcup X_i) = \bigcup f(X_i)}$$

Teorema di Kleene

Se f è continua, allora

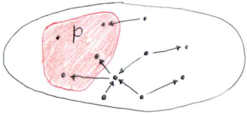
(1) il minimo punto fisso di f si può ottenere calcolando

$$f(\emptyset), \quad f(f(\emptyset)), \quad f(f(f(\emptyset))), \quad \cdots$$

(2) il massimo punto fisso di f si può ottenere calcolando

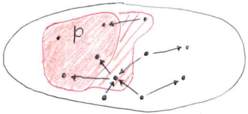
$$f(A), \quad f(f(A)), \quad f(f(f(A))), \quad \cdots$$

Teoremi di punto fisso e logiche temporali



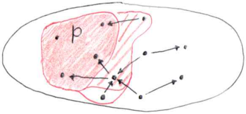
Fp

Teoremi di punto fisso e logiche temporali



Fp

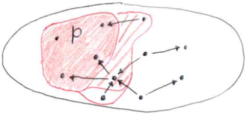
Teoremi di punto fisso e logiche temporali



Fp

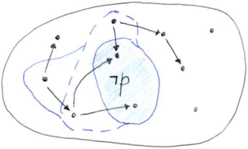
min punto fisso

Teoremi di punto fisso e logiche temporali



Fp

min punto fisso



Gp

max punto fisso