Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
20 Febbraio 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

   a. **(3 punti)** Si determinino (se esistono) massimi e minini relativi di f sul suo domminio;

• $f(x,y) = f(-x,-y) = -f(-x,y) = -f(x,-y)$. studio solo f nel I° quadrante

•• $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} (x,y)=(0,0) \\ (x,y)=(1,1) \end{matrix}$

••• $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} (x^2-3)xy & (1-x^2)(1-y^2) \\ (1-x^2)(1-y^2) & (y^2-3)xy \end{bmatrix} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \Rightarrow$

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ non definita $\Rightarrow (0,0)$ è sella

$H_f(1,1) = e^{-1}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ definita negativa $\Rightarrow$ $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono Max relativi

$(-1,1)$ e $(1,-1)$ sono Min relativi

per le simmetrie di f

   b. **(1 punti)** si calcoli, se esiste, $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)$;

$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = \lim_{r\to\infty} r^2 \cos\theta \sin\theta\, e^{-\frac{r^2}{2}} = \underbrace{\cos\theta \sin\theta}_{\text{quantità limitata } \forall\theta} \underbrace{\lim_{r\to\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}}_{\text{va a zero}} = 0$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

   c. **(2 punti)** si determinino estremo superiore, estremo inferiore e (se esistono) massimi e minini assoluti di f sul suo dominio;

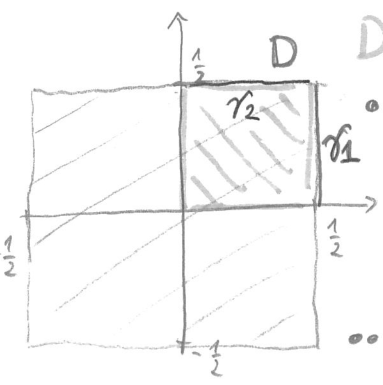
Sia $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere. Poiché $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0 \Rightarrow \exists R:$ $f(x,y)$ ristretta su $\partial B(0,R)$ è tale che $|f(x,y)| < \varepsilon$ $\forall (x,y) \in \partial B(0,R)$. Quindi $\forall \varepsilon > 0$, Max assoluto e Minimo assoluto di f su $\overline{B(0,R)}$ esistono (per Teo. di Weierstrass) e sono rispettivamente i punti $(1,1)$; $(-1,-1)$ e $(1,-1)$; $(-1,1)$: questi sono quindi anche assoluti e

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = e^{-\frac{1}{2}}$

$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -e^{-\frac{1}{2}}$

   d. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nell'insieme:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$



D^+

• Studio f in $D \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} = D^+$.

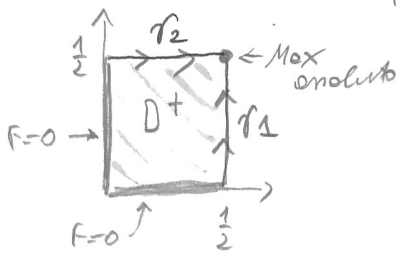
In D^+ esistono Max/Min assoluti per T. Weierstrass; $f \geq 0$ in D^+ e $f = 0$ sugli assi; non ci sono p.ti estremali in $\mathrm{int}(D^+)$. Studio i bordi $\gamma_1 = \{(\frac{1}{2}, y) : 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ e $\gamma_2 = \{(x, \frac{1}{2}) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$

•• $f|_{\gamma_1} = f(\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{2} y e^{-\frac{1}{8}} e^{-\frac{y^2}{2}} = g(y)$ $\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{8}} e^{-\frac{y^2}{2}} (1 - y^2) > 0$ $\forall y \in [0, \frac{1}{2}]$

$0 \leq y \leq \frac{1}{2}$

$f|_{\gamma_2} = f(x, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{8}} e^{-\frac{x^2}{2}} = g(x)$ $\Rightarrow g'(x) > 0$ in $[0, \frac{1}{2}]$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$



••• Quindi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ sono Max assoluti in D

$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sono Min assoluti in D

2. **(8 punti)** Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove

$$a_n = \begin{cases} 3^n & \text{se } n \text{ é dispari} \\ \frac{n}{2^n} & \text{se } n \text{ é pari} \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Calcolarne l'insieme di convergenza puntuale e gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme.

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 3$ quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{3}$. Per $|x| = \frac{1}{3}$ $a_n \not\to 0$ quindi la serie non converge. Si ha convergenza uniforme in ogni insieme $[a,b]$ con $-\frac{1}{3} < a \leq b < \frac{1}{3}$. $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k}{2^{2k}} x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} 3^{2k+1} x^{2k+1}$ poiché entrambe le serie convergono per $|x| < \frac{1}{3}$

$$S(x) = 3x \sum_{0}^{+\infty} (9x^2)^k + x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k\, x^{2k-1}}{2^{2k}} = \frac{3x}{1-9x^2} + x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}}$$

b. **(4 punti)** Detta $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ calcolare $S(x)$. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} S(x) = +\infty$$ poiché $S(x) = \frac{3x}{1-9x^2} +$ serie convergente in $x = \frac{1}{3}$

giustificando la risposta.

$$S(x) = \frac{3x}{1-9x^2} + x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{3x}{1-9x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2}$$

$$\int_{-1/4}^{1/4} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-1/4}^{1/4} a_n x^n$$ per la convergenza uniforme. $\int_{-1/4}^{1/4} x^n = 0$ se n è dispari quindi:

c. **(2 punti)** Dimostrare che

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} S(x)\, \mathrm{d}x < \frac{1}{126}$$

giustificando la risposta.

$$\int_{-1/4}^{1/4} S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-1/4}^{1/4} \frac{2k}{2^{2k}} x^{2k} = \sum_{k=0} \frac{2k}{2^{2k}} \cdot \frac{2}{4^{2k+1}} \cdot \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0} \frac{2k}{2k+1} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(64)^k}$$

$$< \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(64)^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{63}$$

3. **(8 punti)** Per ogni $r \geq 0$ sia

$$A_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overbrace{x^2+y^2+z^2 \leq r^2}^{B_{\mathbb{R}^3}((0,0,0),r)},\ \overbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 2zr}^{B_{\mathbb{R}^3}((0,0,-r),r)}\}. \quad \Rightarrow A_r \text{ è compatto}$$

Passo in coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\pi],\ R \geq 0$$

A_r diventa

$$\begin{cases} R^2 \leq r^2 \\ R^2 \leq 2Rr\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq R \leq r\min\{1, 2\cos\varphi\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq R \leq r & \text{per } \varphi \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ 0 \leq R \leq 2r\cos\varphi & \text{per } \varphi \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \quad (*)$$

a. **(3 punti)** Si calcoli il volume di A_r;

$$\mathrm{Vol}(A_r) = \int_{A_r} dx\,dy\,dz \underset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^r R^2\sin\varphi\, dR\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\varphi} R^2\sin\varphi\, dR\, d\varphi\right) d\theta =$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi\, d\varphi \left(\frac{1}{3}R^3\Big|_0^r\right) + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left(\frac{1}{3}R^3\Big|_0^{2r\cos\varphi}\right) d\varphi\right) = 2\pi\left(\frac{r^3}{3}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{3}r^3\left(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{1}{6}r^3 + \frac{1}{24}r^3\right) = \frac{5}{12}\pi r^3$$

b. **(5 punti)** si calcoli

$$\int_{A_r} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

esiste finito poiché f continua su A_r compatto

$$\int_{A_r} z^2\, dx\,dy\,dz \underset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^r R^4\cos^2\varphi\sin\varphi\, dR\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\varphi} R^4\cos^2\varphi\sin\varphi\, dR\, d\varphi\right) d\theta =$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi\sin\varphi \left(\frac{1}{5}R^5\Big|_0^r\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi\left(\frac{1}{5}R^5\Big|_0^{2r\cos\varphi}\right) d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{r^5}{5}\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) + \frac{32}{5}r^5\left(-\frac{\cos^8\varphi}{8}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\right) = 2\pi\frac{r^5}{5}\left(\frac{7}{24} + \frac{1}{64}\right) = \frac{59}{480}\pi r^5$$

4. **(8 punti)** Sia $a \geq 0$. Si consideri

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}e^{x+\sqrt{y}} = f(x,y) \\ y(0) = a \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right)$$

a. **(3 punti)** Si provi che per ogni $a > 0$ esiste un'unica soluzione locale y_a del problema di Cauchy e la si determini esplicitamente.

essendo f C^1 di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ vale teorema $\exists!$ locale $\forall a>0$

$e^{-\sqrt{y}} = -e^x + c \qquad e^{-\sqrt{a}} = -1 + c \Rightarrow c = +1 + e^{-\sqrt{a}}$

$e^{-\sqrt{y}} = 1 + e^{-\sqrt{a}} - e^x$ deve essere $1 + e^{-\sqrt{a}} - e^x > 0 \Rightarrow x < \log(1 + e^{-\sqrt{a}})$

$-\sqrt{y} = \log(1 + e^{-\sqrt{a}} - e^x)$ quindi $1 + e^{-\sqrt{a}} - e^x \leq 1 \Rightarrow x \geq -\sqrt{a}$

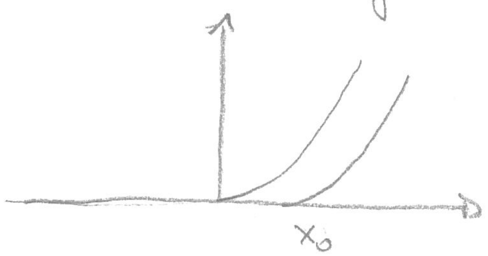
b. **(3 punti)** É possibile prolungare la soluzione y_a su un intervallo illimitato di $\mathbb{R}$? In quanti modi?

$\sqrt{y} = \log\left(\frac{1}{1+e^{-\sqrt{a}} - e^x}\right) \qquad y_a = \log^2\left(\frac{1}{1+e^{-\sqrt{a}} - e^x}\right)$ definita in $[-\sqrt{a}, \log(1+e^{-\sqrt{a}}))$

poiché $y_a(-\sqrt{a}) = 0$ e $y_a'(-\sqrt{a}) = 0$ y_a si prolunga con la soluzione identicamente nulla per $x < -\sqrt{a}$. Non esistono altre possibilità poiché $\lim_{x \to \log(1+e^{-\sqrt{a}})} y_a = +\infty$

c. **(2 punti)** Si consideri ora il caso $a = 0$. Quante soluzioni locali ha il problema di Cauchy? Determinarle tutte.

per $a = 0$ obtiamo la soluzione banale e inoltre la soluzione $y = \log^2(2 - e^x)$ definita per $x \in [0, \log 2)$



se $x_0 > 0$ posto $-\sqrt{y} = \log(1 + e^{x_0} - e^x)$

Si ha che la funzione

$$y(x) = \log^2(1 + e^{x_0} - e^x)$$

definita nell'intervallo $[x_0, \log(1+e^{x_0}))$ soddisfa le condizione $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ e quindi si raccorda con $y \equiv 0$ dando luogo a un'altra soluzione del problema di Cauchy con dato $a = 0$