Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
20 Febbraio 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

   a. **(3 punti)** Si determinino (se esistono) massimi e minini relativi di f sul suo domminio;

   b. **(1 punti)** si calcoli, se esiste, $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)$;

   c. **(2 punti)** si determinino estremo superiore, estremo inferiore e (se esistono) massimi e minini assoluti di f sul suo dominio;

   d. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nell'insieme:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \max\left(|x|, |y|\right) \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

2. **(8 punti)** Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove

$$a_n = \begin{cases} 3^n & \text{se } n \text{ é dispari} \\ \frac{n}{2^n} & \text{se } n \text{ é pari} \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Calcolarne l'insieme di convergenza puntuale e gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme.

b. **(4 punti)** Detta $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ calcolare $S(x)$. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} S(x)$$

giustificando la risposta.

c. **(2 punti)** Dimostrare che

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} S(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{126}$$

giustificando la risposta.

3. **(8 punti)** Per ogni $r \geq 0$ sia

$$A_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2zr\}.$$

a. **(3 punti)** Si calcoli il volume di A_r;

b. **(5 punti)** si calcoli

$$\int_{A_r} z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

4. **(8 punti)** Sia $a \geq 0$. Si consideri

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}e^{x+\sqrt{y}} \\ y(0) = a \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si provi che per ogni $a > 0$ esiste un'unica soluzione locale y_a del problema di Cauchy e la si determini esplicitamente.

b. **(3 punti)** É possibile prolungare la soluzione y_a su un intervallo illimitato di $\mathbb{R}$? In quanti modi?

c. **(2 punti)** Si consideri ora il caso $a = 0$. Quante soluzioni locali ha il problema di Cauchy? Determinarle tutte.