Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
20 Settembre 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Siano

$$f(x,y,z) = xyz \qquad \text{e} \qquad E = \{x>0,\, y>0,\, z>0,\, x+2y+3z=1\}\,.$$

a. **(3 punti)** Dimostrare che f ha massimo in E;

L'insieme $\bar{E} = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 ; x+2y+3z=1\}$ è chiuso e limitato (ciascun addendo non può superare 1!) quindi compatto. f è continua su $\bar{E}$ e quindi ha sia massimo che minimo. Tutti i punti di $\bar{E}$ che hanno una coordinata nulla sono minimi ($f \geq 0$ su $\bar{E}$) Quindi il massimo deve trovarsi in E.

b. **(4 punti)** trovare il massimo di f in E;

$$\mathcal{L}(f,\lambda) = xyz - \lambda(x+2y+3z-1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = yz - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y = xz - 2\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_z = yx - 3\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = x+2y+3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = yz \\ z(x-2y)=0 \\ y(x-3z)=0 \\ \rule{2cm}{0.4pt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = yz \\ x = 2y \\ x = 3z \\ x+2y+3z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = yz \\ y = x/2 \\ z = x/3 \\ x + 2\frac{x}{2} + 3\frac{x}{3} = 1 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{3}$ $\quad y = \frac{1}{3 \cdot 2}$ $\quad z = \frac{1}{3 \cdot 3}$ $\quad$ quindi $\quad xyz = \frac{1}{9^2 \cdot 2}$

$\lambda = \frac{1}{3^3 \cdot 2}$

2. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ definita da

$$f_n(x) = (x-n)e^{-(x-n)^2}.$$

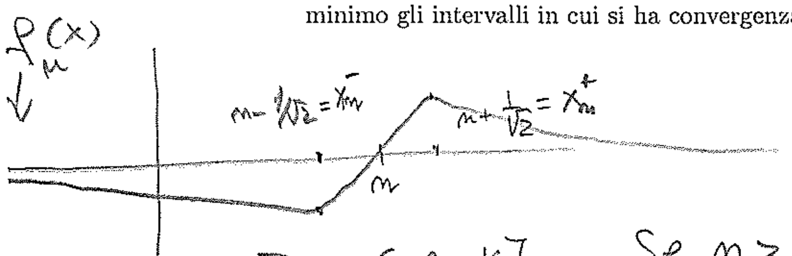
a. **(1 punti)** Si determini l'insieme E di convergenza puntuale e la funzione limite;

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $f_n(x_0) \to 0$ poiché e^{-n^2} prevale su tutto il resto.

$$f'_n(x) = e^{-(x-n)^2}\left[1 - 2(x-n)^2\right] \geq 0 \quad \text{se } x_n^- = n - \frac{1}{\sqrt{2}} < x < n + \frac{1}{\sqrt{2}} = x_n^+$$

quindi $f(x_n^-) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$ è minimo $f(x_n^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$ è massimo;

b. **(4 punti)** si stabilisca se la convergenza é uniforme su E e, in caso negativo, si determinimo gli intervalli in cui si ha convergenza uniforme;



$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \not\to 0 \text{ per } n \to \infty$$

Sia ora $I_k = (-\infty, k]$. Se $n > k + \frac{1}{\sqrt{2}}$ f_n risulta decrescente su I_k e $\sup_{x \in I_k} |f_n(x)| = |f_n(k)| \to 0$ per $n \to \infty$ quindi c'è convergenza uniforme su I_k

c. **(3 punti)** si determinimo gli intervalli in cui si ha convergenza uniforme per

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Su $\mathbb{R}$ non può esserci convergente uniforme perchè il termine generale non tende a zero uniformemente.
Su ogni intervallo $I_k = (-\infty, k]$ si ha

$|f_n(x)| \leq |f_n(k)|$ definitivamente, poichè

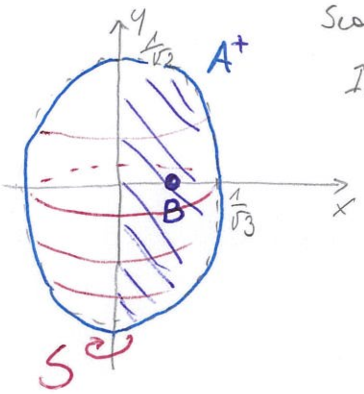
$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(k)|$ converge (basta applicare il criterio delle radice ...) la serie converge uniformemente per Weierstrass

3. **(8 punti)**

a. **(3 punti)** Si consideri

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Sia S il solido ottenuto dalla rotazione di A intorno all'asse delle y. Si calcoli il volume di S.



Sia $A^+ = A \cap \{x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia (x_A, y_A) il suo baricentro.

Il volume di S è $Vol(S) = 2\pi \, Area(A^+) \, x_B$

con $x_B = \frac{1}{Area(A^+)} \int_{A^+} x \, dx \, dy$. Quindi

$$Vol(S) = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{3}} x \int_{-\frac{\sqrt{1-3x^2}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{1-3x^2}}{\sqrt{2}}} dy \, dx = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\sqrt{1-3x^2} \, dx$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left(1-3x^2\right)^{3/2}\left(-\frac{1}{9}\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4\pi}{9\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{9}$$

b. **(5 punti)** Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 - 1, \, 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

Si calcoli

$$\int_\Omega |z| \, dx \, dy \, dz.$$

Poiché $(x, y, z) \in \Omega \iff (x, y, -z) \in \Omega$ e $f(x,y,z) = |z| = f(x, y, -z)$

$$\int_\Omega |z| \, dx \, dy \, dz = 2 \int_{\Omega \cap \{z \geq 0\}} z \, dx \, dy \, dz = \otimes$$

per $z \geq 0$ $\quad x^2+y^2+1 \leq z^2 \leq 2-2x^2-y^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-2x^2-y^2}$

con la condizione $0 \leq 1+x^2+y^2 \leq 2-2x^2-y^2 \iff 3x^2+2y^2 \leq 1$

$$\otimes = 2 \int_{(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+2y^2 \leq 1\}} \left(\int_{\sqrt{1+x^2+y^2}}^{\sqrt{2-2x^2-y^2}} z \, dz \right) dx \, dy =$$

$$= \int_{(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+2y^2 \leq 1\}} (1-3x^2-2y^2) \, dx \, dy = \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\theta & r \in [0,1] \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

con Jacobiano della trasformazione $\frac{r}{\sqrt{6}}$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{6}} r(1-r^2) \, dr \, d\theta = \frac{\sqrt{6}}{12}\pi$$

4. **(10 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y' + y^2 - 1 = 0 \\ y(2) = k \end{cases}$$

a. **(1 punto)** Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste unica la soluzione locale del problema;

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-y^2}{x^2} = F(x,y) \\ y(2) = k \end{cases}$$

F è continua e $\frac{\partial F}{\partial y}$ è continua $\forall (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$. Quindi $\exists!$ la soluzione locale del problema $\forall k \in \mathbb{R}$ essendo $(2,k) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$

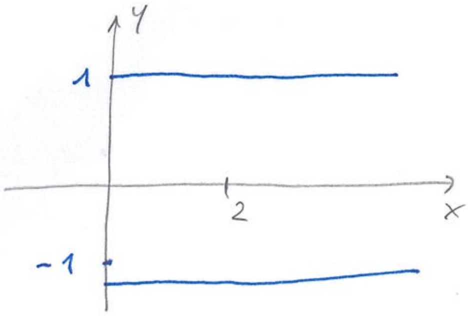
b. **(4 punti)** si determini la soluzione locale del problema (per i k per i quali esiste);

$y' = \dfrac{1-y^2}{x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{1-y^2} = \dfrac{dx}{x^2}$ se $x>0$ e $y \neq \pm 1$. Si noti che $y(x)=1$ e $y(x)=-1$ sono soluzioni locali e globali per $k=1$ e $k-1$ rispettivamente.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = -\int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{x} + c \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = e^{\frac{2}{x}} b \Rightarrow y(x) = \dfrac{be^{\frac{2}{x}}+1}{1-b\,e^{2/x}}$ $\quad c\in\mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

la condizione $y(2)=k \Rightarrow b = \dfrac{k-1}{(k+1)e} \Rightarrow y(x) = \dfrac{\frac{k-1}{k+1}e^{\frac{2}{x}-1}+1}{1-\frac{k-1}{k+1}e^{\frac{2}{x}-1}} = \dfrac{(k-1)e^{\frac{2}{x}-1}+k+1}{k+1-(k-1)e^{\frac{2}{x}-1}}$ ben definita in un intorno di 2, $\forall k \in \mathbb{R}$

c. **(5 punti)** si determinino, se esistono, tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la corrispondente soluzione del problema di Cauchy é definita su tutto $(0,\infty)$.



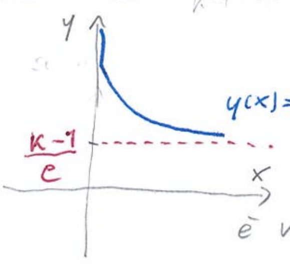
la soluzione locale $y(x) = \dfrac{(k-1)e^{\frac{2}{x}-1}+k+1}{k+1-(k-1)e^{\frac{2}{x}-1}}$

è definita su $(0,\infty)$ se

$k+1 \neq (k-1)e^{\frac{2}{x}-1} \quad \forall x \in (0,\infty)$ ▲

si noti che questo è certamente vero per $k=\pm 1$.

Primo caso $k>1$

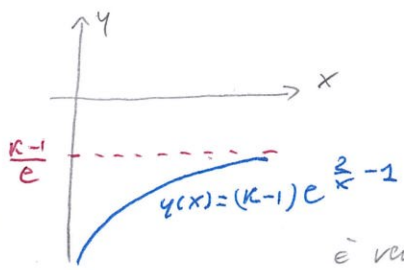


la disuguaglianza ▲ è vera se $\frac{k-1}{e} \geq k+1$

cioè $k \leq \frac{e+1}{1-e} < 0$

impossibile essendo $k>1$.

Secondo caso $k<1$



la disuguaglianza ▲ è vera se $k+1 \geq \frac{k-1}{e}$

cioè $k \geq \frac{e+1}{1-e}$

Quindi

$$\boxed{\frac{1+e}{1-e} \leq k \leq +1}$$