Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
20 Settembre 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Siano

$$f(x,y,z) = xyz \qquad \text{e} \qquad E = \{x > 0,\, y > 0,\, z > 0,\, x + 2y + 3z = 1\}\,.$$

   a. **(3 punti)** Dimostrare che f ha massimo in E;

   b. **(4 punti)** trovare il massimo di f in E;

2. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ definita da

$$f_n(x) = (x-n)e^{-(x-n)^2}.$$

a. **(1 punti)** Si determini l'insieme E di convergenza puntuale e la funzione limite;

b. **(4 punti)** si stabilisca se la convergenza é uniforme su E e, in caso negativo, si determinimo gli intervalli in cui si ha convergenza uniforme;

c. **(3 punti)** si determinimo gli intervalli in cui si ha convergenza uniforme per

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

3. **(8 punti)**

a. **(3 punti)** Si consideri

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 3x^2 + 2y^2 \leq 1 \right\}.$$

Sia S il solido ottenuto dalla rotazione di A intorno all'asse delle y. Si calcoli il volume di S.

b. **(5 punti)** Sia

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq z^2 - 1, \, 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \right\}.$$

Si calcoli

$$\int_\Omega |z| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

4. **(10 punti)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y' + y^2 - 1 = 0 \\ y(2) = k \end{cases}$$

a. **(1 punto)** Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste unica la soluzione locale del problema;

b. **(4 punti)** si determini la soluzione locale del problema (per i k per i quali esiste);

c. **(5 punti)** si determinino, se esistono, tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la corrispondente soluzione del problema di Cauchy é definita su tutto $(0, \infty)$.