Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
21 Giugno 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

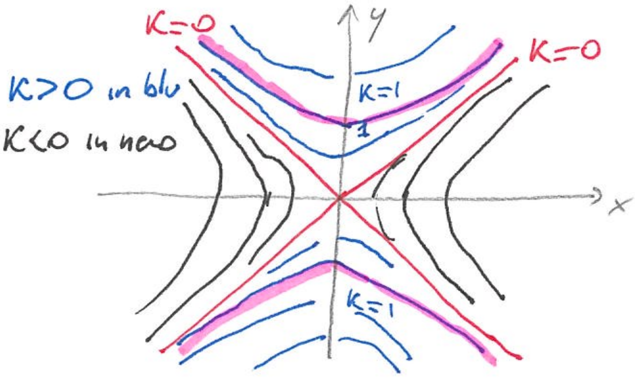
1. **(7 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

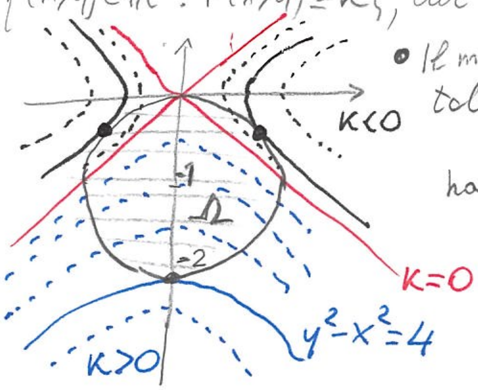
$$f(x, y) = y^2 - x^2.$$

a. **(4 punti)** Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione f in

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + (y + 1)^2 \leq 1\};$$

le curve di livello di f sono $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=k\}$, cioè iperboli per $k\neq 0$





• Il min di f in Ω è $k<0$ tale che $\begin{cases} x^2-y^2=k \\ x^2+(y+1)^2=1 \end{cases}$ ha esattamente due soluzioni. Facili conti danno $k=-\frac{1}{2}$

• 4 è il Max di f in Ω

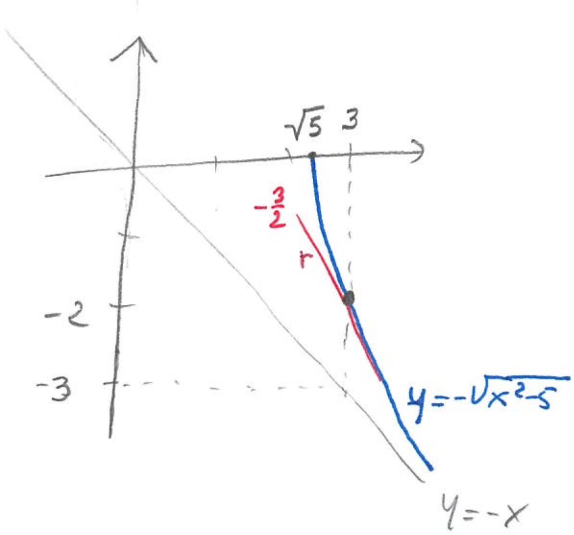
b. **(3 punti)** si tracci un grafico qualitativo locale (individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá) della curva di livello di f passante per $(3, -2)$.

$f(3,-2)=-5$; le curva cercata è $y^2-x^2=-5$

$\Rightarrow y=-\sqrt{x^2-5}$ per $|x|\geq\sqrt{5}$

$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ $\qquad y'(3) = -\dfrac{3}{2}$

$y'' = \dfrac{5}{(x^2-5)^{3/2}}$ $\qquad y''(3) = \dfrac{5}{8}$



r: $y+2 = -\frac{3}{2}(x-3)$

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

2. **(9 punti)** Sia $a \neq 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ definita da

$$f_n(x) = \tanh(n^a x).$$

a. **(2 punti)** Al variare di $a \neq 0$ si determini l'insieme E_a di convergenza puntuale e la funzione limite;

$$a>0: \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases} = F(x)$$

$$a<0 \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \qquad \Rightarrow E_a = \mathbb{R} \ \forall a\neq 0$$

b. **(3 punti)** al variare di $a \neq 0$ si stabilisca se la convergenza é uniforme su E_a;

per $a>0$ non c'è convergenza uniforme poiché la funzione limite è discontinua

per $a<0$ $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 1 \not\to 0$ per $n\to+\infty$ e quindi non c'è convergenza uniforme

c. **(4 punti)** al variare di $a \neq 0$ si stabiliscano eventuali sottointervalli di E_a in cui la convergenza é uniforme.

per $a>0$ bisogna escludere un intorno dell'origine.

per simmetria considero $x \geq c > 0$:

$$\sup_{x\in[c,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[c,+\infty)} 1 - Th(n^\alpha x) = 1 - Th(n^\alpha c)$$

poiché $1 - Th(n^\alpha x)$ è decrescente in quell'intervallo

quindi $\sup_{x\in[c,+\infty)} |f_{n,\alpha}(x) - f(x)| = 1 - Th(n^\alpha c) \to 0 \quad n\to+\infty$

$\alpha<0$ poiché $Th(n^\alpha x)$ è dispari e crescente si ha

$$\sup_{|x|\leq d} |Th(n^\alpha x)| = Th(n^\alpha d) \to 0 \quad n\to\infty.$$

concludendo: $\alpha>0$ abbiamo conv. unif. in $|x|\geq c>0$

$\alpha<0$ " " " " $|x|\leq d<+\infty$

$\forall c>0$

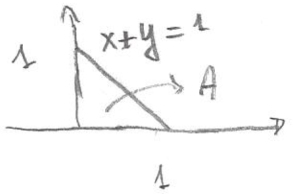
$\forall d>0$

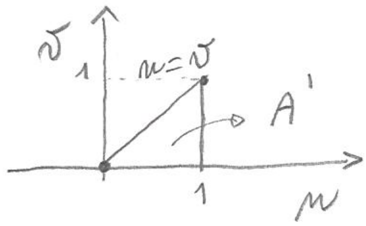
3. **(7 punti)** Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \leq 1, \ y \geq 0, \ x \geq 0\}.$$

a. **(5 punti)** Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste il seguente integrale:

$$\int_A \frac{(x+y)^\alpha e^{-(x+y)^2}}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$





posto $\begin{cases} x+y = u \\ y = v \end{cases}$

$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ risulta

$$\int_A \frac{(x+y)^\alpha e^{-(x+y)^2}}{\sqrt{y}} dx dy = \int_{A'} u^\alpha \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{v}} du dv = \int_0^1 u^\alpha e^{-u^2} du \int_0^u v^{-1/2} dv$$

$$= \int_0^1 u^\alpha e^{-u^2} \left[2 v^{1/2}\right]_0^u = 2 \int_0^1 u^{\alpha + 1/2} e^{-u^2} du$$

; essendo l'integrande positiv (già come funzione di due variabili) $\exists$ se $\alpha > -3/2$

b. **(2 punti)** Si calcoli l'integrale di cui al punto a. nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$.

per $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha $2 \int_0^1 u \, e^{-u^2} du = -e^{-u^2}\Big]_0^1 = (1 - e^{-1})$

4. **(9 punti)**

a. **(4 punti)** Si determini, se esiste, la soluzione di

$$\begin{cases} x' = x + y & \bullet \\ y' = -2x - y & \square \\ x(\pi/2) = 0 \\ y(\pi/2) = \pi \end{cases}$$

determinando il massimo intervallo di definizione.

$x'' \overset{\bullet}{=} x' + y' \overset{\square}{=} x' + (-2x - y) = x' - 2x - y \overset{\bullet}{=} x' - 2x - (x' - x) = -x$

$\Rightarrow x'' + x = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$

$\overset{\bullet}{\Rightarrow} y(t) = x' - x = c_1 \cos t - c_2 \sin t - c_1 \sin t - c_2 \cos t$. le condizioni iniziali

danno $\begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_2 - c_1 = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = -\pi \end{matrix}$. $\begin{cases} x(t) = -\pi \cos t \\ y(t) = \pi(\sin t + \cos t) \end{cases}$ definite $\forall t \in \mathbb{R}$

b. **(5 punti)** Si determini, se esiste, la soluzione di

$$\begin{cases} x' = x + y & * \\ y' = -2x - y + \dfrac{1}{\sin t} & \Delta \\ x(\pi/2) = 0 \\ y(\pi/2) = \pi \end{cases}$$

determinando il massimo intervallo di definizione.

$x'' \overset{*}{=} x' + y' \overset{\Delta}{=} x' - 2x - y + \frac{1}{\sin t} \overset{*}{=} x' - 2x - (x' - x) + \frac{1}{\sin t} = -x + \frac{1}{\sin t}$

$\Rightarrow x'' + x = \frac{1}{\sin t}$. La soluzione generale dell'omogenea associata è $\tilde{x} = \tilde{c}_1 \sin t + \tilde{c}_2 \cos t$. Uso variazione costanti arbitrarie per trovare una particolare della forma x

$x_{PAR} = c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t$

$\begin{cases} c_1' \sin t + c_2' \cos t = 0 \longrightarrow c_1' = -c_2' \frac{\cos t}{\sin t} \\ c_1' \cos t - c_2' \sin t = \frac{1}{\sin t} \longrightarrow -c_2' \frac{\cos^2 t}{\sin t} - c_2' \sin t = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow c_2' = -1 \Rightarrow c_2(t) = - \end{cases}$

che in un intorno di $t = \frac{\pi}{2}$ ha senso

$\Rightarrow c_1' = \frac{\cos t}{\sin t} \Rightarrow c_1(t) = \ln|\sin t| \Rightarrow x(t) = \underbrace{\tilde{c}_1 \sin t + \tilde{c}_2 \cos t}_{\text{SOL OMOG}} + \underbrace{\sin t \cdot \log(\sin t) - t \cos t}_{\text{SOL PART}}$

che ha senso per $0 < t < \pi$. La condizione $x(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \tilde{c}_1 = 0$

$y(t) \overset{*}{=} x'(t) - x(t) = -\tilde{c}_2 \sin t + \cos t \cdot \log(\sin t) + \sin t \cancel{\frac{\cos t}{\sin t}} - \cancel{\cos t} + t \sin t - \tilde{c}_2 \cos t - \sin t \log(\sin t) + t \cos t$

$y(\frac{\pi}{2}) = \pi \Rightarrow \tilde{c}_2 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ la soluzione è $\begin{cases} x(t) = -(\frac{\pi}{2} + t) \cos t + \sin t \log(\sin t) \\ y(t) = (\frac{\pi}{2} + t)(\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t) \log(\sin t) \end{cases}$ con $t \in (0, \pi)$