Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
21 Giugno 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = y^2 - x^2.$$

a. **(4 punti)** Si determinino massimi e minimi assoluti della funzione f in

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + (y + 1)^2 \leq 1\};$$

b. **(3 punti)** si tracci un grafico qualitativo locale (individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá) della curva di livello di f passante per $(3, -2)$.

2. **(9 punti)** Sia $a \neq 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ definita da

$$f_n(x) = \tanh(n^a x).$$

a. **(2 punti)** Al variare di $a \neq 0$ si determini l'insieme E_a di convergenza puntuale e la funzione limite;

b. **(3 punti)** al variare di $a \neq 0$ si stabilisca se la convergenza é uniforme su E_a;

c. **(4 punti)** al variare di $a \neq 0$ si stabiliscano eventuali sottointervalli di E_a in cui la convergenza é uniforme.

3. **(7 punti)** Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x+y \leq 1, \; y \geq 0, \; x \geq 0\}.$$

a. **(5 punti)** Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste il seguente integrale:

$$\int_A \frac{(x+y)^\alpha e^{-(x+y)^2}}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

b. **(2 punti)** Si calcoli l'integrale di cui al punto a. nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$.

4. **(9 punti)**

a. **(4 punti)** Si determini, se esiste, la soluzione di

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - y \\ x(\pi/2) = 0 \\ y(\pi/2) = \pi \end{cases}$$

determinando il massimo intervallo di definizione.

a. **(5 punti)** Si determini, se esiste, la soluzione di

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - y + \dfrac{1}{\sin t} \\ x(\pi/2) = 0 \\ y(\pi/2) = \pi \end{cases}$$

determinando il massimo intervallo di definizione.