Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
26 Gennaio 2023

Tempo per la prova 2 ore e 20 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(4x^2-3y^2)}{2x^2+3y^2} \arctan(x+y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

$$|f(x,y)| \leq \frac{4x^2}{2x^2+3y^2}|\operatorname{artg}(x+y)| + \frac{3y^2}{2x^2+3y^2}|\operatorname{artg}(x+y)| \leq \left(\frac{4x^2}{2x^2} + \frac{3y^2}{3y^2}\right)|\operatorname{artg}(x+y)| =$$

$$= 3\,|\operatorname{artg}(x+y)| \longrightarrow 0 \quad \text{se } (x,y) \longrightarrow (0,0)$$

b. **(2 punti)** Si stabilisca se f ammette derivate direzionali nell'origine;

sia $v = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$ $\quad \dfrac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} = \dfrac{(4a^2-3b^2)t^2}{(2a^2+3b^2)t^2} \dfrac{\operatorname{artg}[(a+b)t]}{t}$

quindi $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (a+b)\dfrac{(4a^2-3b^2)}{2a^2+3b^2}$

c. **(2 punti)** Si stabilisca se f é differenziabile nell'origine.

Siccome l'espressione $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ NON è lineare in a e b

f NON PUÒ essere differenziabile in $(0,0)$

2. **(7 punti)** Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ é dispari} \\ \frac{n}{3^n} & \text{se } n \text{ é pari} \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Calcolarne l'insieme di convergenza puntuale e gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme.

$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left(2, \frac{1}{3}\right) = 2$. Quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{2}$

Consideriamo ora i due estremi: $x_0 = \frac{1}{2}$ e $x_1 = -\frac{1}{2}$ Siccome $a_n x_i^n$ $(i=0,1)$ non tende a zero la serie non può convergere.

$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$ poichè entrambe le serie convergono (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{2}$

b. **(3 punti)** Detta $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ calcolare $S(x)$. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} S(x)$$

giustificando la risposta.

$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k}{3^{2k}} x^{2k} = 2x \sum_{k=0} (4x^2)^k + 2 \sum_0 \frac{k x^{2k}}{3^{2k}} = A + B$

A è una serie geometrica di ragione $4x^2$. Per valutare B poniamo $t = \frac{x^2}{3^2}$ e

Valutiamo $\sum_{k=0}^{+\infty} k t^k = t \sum_{k=0}^{+\infty} k t^{k-1} = t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{1}{t(1-t)^2}$. Quindi

$B = 2 \cdot \frac{x^2}{9} \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^2}$ cioè $S(x) = \frac{2x}{1-4x^2} + \frac{2}{9} \frac{x^2}{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^2}$; $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} S(x) = +\infty$ (*)

c. **(2 punti)** Dimostrare che

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} S(x)\, \mathrm{d}x < \frac{1}{143}$$

giustificando la risposta.

Siccome in $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ la serie converge uniformemente si può scambiare l'integrale con la sommatoria: $\int_{-1/4}^{1/4} S(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-1/4}^{1/4} 2^{2k+1} x^{2k+1} dx + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-1/4}^{1/4} \frac{2k}{3^{2k}} x^{2k} dx = A' + B' = 0 + B'$

$B' = 2 \sum_0^{+\infty} \int_{-1/4}^{1/4} \frac{k x^{2k}}{3^{2k}} dx = 2 \sum_0^{+\infty} \frac{k}{3^{2k}} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_{-1/4}^{1/4} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2k+1} \cdot \frac{1}{3^{2k}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} < \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^2 \cdot 4^2}\right)^k =$

2

$= \left[\frac{1}{1-\alpha} - 1\right]$ dove $\alpha = \frac{1}{144}$ cioè $B' < \frac{1}{143}$

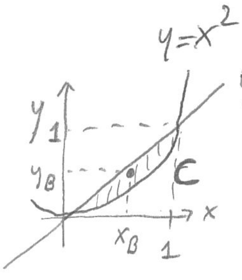
(*) Si poteva anche dedurre dal fatto che una delle due serie è convergente per $x = \frac{1}{2}$, mentre l'altra è geometrica di ragione $4x^2$!

3. **(8 punti)** Sia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 \leq y \leq x\}\,.$$

(x_B, y_B) Baricentro di C

a. **(3 punti)** Si determini il baricentro dell'insieme C. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto dalla rotazione di C intorno all'asse delle y; si calcoli il volume di D.



$$\text{Area}(C) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1\,dy\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$x_B = \frac{1}{\text{Area}(C)} \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,dy\,dx = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

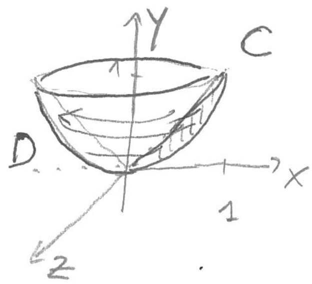
$$y_B = \frac{1}{\text{Area}(C)} \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dy\,dx = 6\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)dx = 6\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{5} \qquad (x_B, y_B) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Vol}(D) = 2\pi\,\text{Area}(C)\,x_B = 2\pi\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

b. **(5 punti)** Si determini se esiste

$$\int_D \underbrace{\frac{|x|}{x^2+y^2+z^2}}_{= f(x,y,z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

e in caso affermativo lo si calcoli.



$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq y \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = y \end{cases} \Rightarrow r^2 < y < r \Rightarrow r \in [0,1]$$

Poiché

$(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (-x,y,z) \in D$ e $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$, allora $\{x \geq 0 \Rightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{r^2}^{r} \frac{r\cos\theta}{r^2+y^2}\cdot r\,dy\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 r \int_{r^2}^{r} \frac{\frac{1}{r}}{1+\left(\frac{y}{r}\right)^2}\,dy\,dr = 4\int_0^1 r\,\text{arctg}\left(\frac{y}{r}\right)\Big|_{r^2}^{r}\,dr =$$

$$= 4\int_0^1 \left(r\frac{\pi}{4} - r\,\text{arctg}\,r\right)dr \underset{\text{per parti}}{=} 4\left(\frac{1}{8}\pi r^2 - \frac{r^2}{2}\arctan r + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\text{arctg}\,r\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

4. **(8 punti)** Sia $a \geq 0$. Si consideri

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}e^{x-\sqrt{y}} = f(x,y) \\ y(0) = a \end{cases} \qquad R^+ = (0,+\infty)$$

a. **(3 punti)** Si provi che per ogni $a > 0$ esiste un'unica soluzione locale y_a del problema di Cauchy e la si determini esplicitamente.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} - e^{x-\sqrt{y}}$; $f \in \mathcal{C}^1(R \times R^+)$ quindi vale $\exists!$ locale $\forall a > 0$

$\frac{y' e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} = e^x \Rightarrow e^{\sqrt{y}} = e^x + c \quad 1 + c = e^{\sqrt{a}} \Rightarrow c = e^{\sqrt{a}} - 1 \qquad e^{\sqrt{y}} = e^x + e^{\sqrt{a}} - 1 > 0$ $\forall a \geq 0$

$\sqrt{y} = \log(e^x + e^{\sqrt{a}} - 1)$ solo se $e^x + e^{\sqrt{a}} - 1 \geq 1$ se $e^{\sqrt{a}} - 1 \geq 1$ $(a \geq \log^2 2)$

la disequazione è sempre vera! se $0 < a < \lg^2 2$ allora deve essere $x \geq \lg(2 - e^{\sqrt{a}})$

b. **(3 punti)** Stabilire tutti i valori di $a > 0$ per cui y_a é prolungabile a tutto $\mathbb{R}$ e discutere l'unicitá del prolungamento.

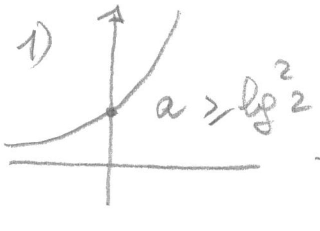
in definitiva 1) $y = \log^2(e^x + e^{\sqrt{a}} - 1)$ se $a \geq \lg^2 2$ e $x \in R$

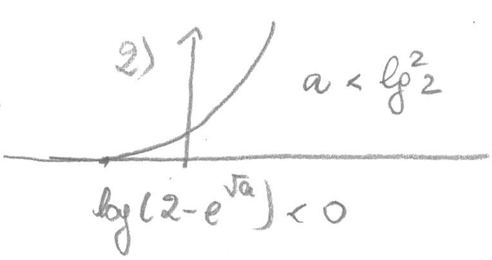
2) $y = \log^2(e^x + e^{\sqrt{a}} - 1)$ se $x \geq \log(2 - e^{\sqrt{a}})$ se $a < \lg^2 2$

Nel caso 1) la soluzione è definita su tutto R, è strettamente positiva e quindi è unica

Nel caso 2) la soluzione si annulla per $\bar{x}_a = \log(2 - e^{\sqrt{a}})$ inoltre si ha $y'(\bar{x}_a) = 0$ quindi c'è un raccordo $\mathcal{C}^1$ con la soluzione $y \equiv 0$

c. **(2 punti)** Determinare tutte le soluzioni locali del problema per $a = 0$.





per $a = 0$ abbiamo la soluzione $y \equiv 0$ e la soluzione $y = x^2$ definita SOLO per $x \geq 0$

Quindi le soluzioni locali sono

$y \equiv 0$ e $y = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

Sia ora $x_0 > 0$. Consideriamo la funzione così definita:

$$y_0(x) = \begin{cases} \log^2(e^x + 1 - e^{x_0}) & \text{per } x > x_0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

ogni $y_0(x)$ è soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 0$