Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
26 Gennaio 2023

Tempo per la prova 2 ore e 20 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(7 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(4x^2 - 3y^2)}{2x^2 + 3y^2} \arctan(x+y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

b. **(2 punti)** Si stabilisca se f ammette derivate direzionali nell'origine;

c. **(2 punti)** Si stabilisca se f é differenziabile nell'origine.

2. **(7 punti)** Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ é dispari} \\ \frac{n}{3^n} & \text{se } n \text{ é pari} \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Calcolarne l'insieme di convergenza puntuale e gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme.

b. **(3 punti)** Detta $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ calcolare $S(x)$. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} S(x)$$

giustificando la risposta.

c. **(2 punti)** Dimostrare che

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} S(x)\, \mathrm{d}x < \frac{1}{143}$$

giustificando la risposta.

3. **(8 punti)** Sia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 \leq y \leq x\} \,.$$

a. **(3 punti)** Si determini il baricentro dell'insieme C. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto dalla rotazione di C intorno all'asse delle y; si calcoli il volume di D.

b. **(5 punti)** Si determini se esiste

$$\int_D \frac{|x|}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

e in caso affermativo lo si calcoli.

4. **(8 punti)** Sia $a \geq 0$. Si consideri

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}e^{x-\sqrt{y}} \\ y(0) = a \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si provi che per ogni $a > 0$ esiste un'unica soluzione locale y_a del problema di Cauchy e la si determini esplicitamente.

b. **(3 punti)** Stabilire tutti i valori di $a > 0$ per cui y_a é prolungabile a tutto $\mathbb{R}$ e discutere l'unicitá del prolungamento.

c. **(2 punti)** Determinare tutte le soluzioni locali del problema per $a = 0$.