Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
5 Luglio 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(9 punti)** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = |x| \log(1 + y).$$

a. **(3 punti)** Si determinino i punti del dominio di f in cui essa é differenziabile; $\text{Dom} f = \mathbb{R} \times (-1, +$

Consideriamo i punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$: la restrizione di f alla retta $y = y_0$ è $|x| \log(1+y_0)$ che non è derivabile in $x = 0$. Quindi f non può essere differenziabile in quei punti. Sia ora $y_0 = 0$. $\nabla f(0,0) = (0,0)$ perché f è nulla sui due assi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| \log(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{perché} \quad \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

b. **(4 punti)** si determinino, se esistono, massimi e minini locali e globali;

tutti i punti $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$ sono minimi locali
" " $(0, y_0)$ con $y_0 < 0$ " massimi locali } studiando il segno di $f(x,y)$. Per lo stesso motivo $(0,0)$ è una sella.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x, y_0) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } -1 < y_0 < 0 \end{cases} \quad \text{quindi non ci sono estremi assoluti}$$

$$f_x = \text{sig} x \log(1+y) \qquad f_y = \frac{|x|}{1+y}$$

che, dove esistono entrambe, non si annulla mai (*)
Il caso $x = 0 = y$ è stato discusso in precedenta.

c. **(2 punti)** si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-1, 1)$.

$\nabla f(-1,1) = (-\log 2, \frac{1}{2})$ quindi il piano cercato ha equazione

$$z - \log 2 = -\log 2 (x+1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

(*) si osservi che questa espressione di f_x presuppone $x \neq 0$

2. **(8 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ definita da

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n^a}\right).$$

a. **(2 punti)** Al variare di a si determini l'insieme E_a di convergenza puntuale e la funzione limite;

Se $a = 0$ $f_n(x) \equiv \operatorname{artg} x \longrightarrow \operatorname{artg} x$ per $n \to +\infty$!!

Se $a > 0$ $f_n(x) \to 0$

se $a < 0$ $f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$

b. **(3 punti)** al variare di a si stabilisca se la convergenza é uniforme su E_a;

per $a < 0$ no poiché la funzione limite è discontinua

per $a = 0$ ovviamente sì

per $a > 0$ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\operatorname{artg} \frac{x}{n^a}\right| = \frac{\pi}{2} \not\to 0$ per $n \to +\infty$

c. **(3 punti)** al variare di $a \neq 0$ si stabiliscano eventuali sottointervalli di E_a in cui la convergenza é uniforme.

osserviamo che $\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{1}{n^a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^{2a}}} > 0 \quad \forall x$

quindi f_n è crescente mentre $-f_n$ è decrescente

per $a > 0$ considero $I = \{ |x| \leq k \}$ $\sup_{x \in I} |f_n(x)| = \left|\operatorname{artg} \frac{k}{n^a}\right| \to 0$ per $n \to +\infty$

per $a < 0$ considero $J = \{ |x| \geq h > 0 \}$ per simmetria considero $x > 0$

$$\sup_{[h, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[h, +\infty)} \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} \frac{x}{n^a} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} \frac{h}{n^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Quindi $\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ $n \to +\infty$

3. **(7 punti)** Si consideri

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 4x^2 + 9y^2 < z < \sqrt{4x^2 + 9y^2}\right\}.$$

Si calcoli, se esiste,

$$\int_\Omega \frac{1}{z + 4x^2 + 9y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

posto $\begin{cases} x = \frac{\rho}{2} \cos\theta \\ y = \frac{\rho}{3} \sin\theta \\ z = z \end{cases}$ a Ω corrisponde Ω' $\quad \Omega' = \begin{cases} 0 \le \theta < 2\pi \\ 0 < \rho < 1 \\ \rho^2 < z < \rho \end{cases}$

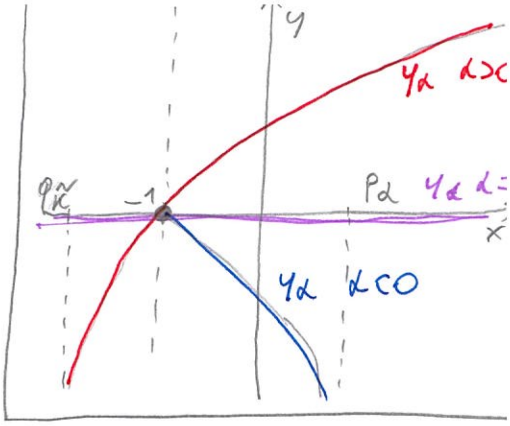
Jacobiano

$$\int_\Omega \frac{1}{z+4x^2+9y^2} = \int_{\Omega'} \frac{\rho}{6} \cdot \frac{1}{z+\rho^2}\, d\rho\, d\theta\, dz =$$

$$2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{6} d\rho \left[\log(z+\rho^2)\right]_{\rho^2}^{\rho} = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{6}\left[\log(\rho+\rho^2) - \log 2\rho^2\right] =$$

$$2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{6} \log\left(\frac{1+\rho}{2\rho}\right) d\rho = \frac{2\pi}{6}\left(\left[\frac{\rho^2}{2}\log\left(\frac{1+\rho}{2\rho}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{2\rho}{1+\rho}\, \frac{1}{2\rho^2}\, d\rho\right.$$

$$\frac{2\pi}{6}\left[\int_0^1 \frac{\rho}{2(1+\rho)}\right] = \frac{2\pi}{6}\left[\frac{\rho - \log(1+\rho)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(1 - \log 2)$$



4. **(8 punti)** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y' = \dfrac{e^y-1}{e^y} \\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

a. **(1 punti)** Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

la funzione $F(x,y)=\dfrac{e^y-1}{e^y(x+1)}$ è continua in un intorno di $(0,\alpha)$ così come $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{(x+1)e^y}$: quindi $\exists!$ la soluzione locale.
Si noti che $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, con $x_0\neq -1$, $\exists!$ la soluzione locale con dato iniziale $y(x_0)=y_0$.

b. **(4 punti)** al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini, se esiste, la soluzione locale y_α del problema;

• Per $\alpha=0 \Rightarrow y_0(x)=0$ è la soluzione

•• Se $\alpha\neq 0$: $\displaystyle\int \frac{e^y}{e^y-1}\,dy=\int\frac{1}{x+1}\,dx+C$

ha senso per $x\neq -1$ e $y\neq 0$.

$\Rightarrow \ln|e^y-1|=\ln|x+1|+C$

$\Rightarrow |e^y-1|=|x+1|\cdot\bar K$ $\quad\bar K$ costante

In $x>-1$ (si noti che il dato iniziale è $x_0=$
diventa $e^y-1=(x+1)\cdot K$ con $K\in\mathbb{R}$

$\xRightarrow{y(0)=\alpha}$ $y_\alpha(x)\overset{\bullet}{=}\ln(1+(e^\alpha-1)(x+1))$ il cui dominio è
→ per $\alpha=0$ $\forall x$
→ per $\alpha>0$ $1+(e^\alpha-1)(x+1)>0$ sempre in $x>-$
→ per $\alpha<0$ $1+(e^\alpha-1)(x+1)>0 \Rightarrow -1<x<P_\alpha$

con $P_\alpha=-1-\dfrac{1}{e^\alpha-1}>0$

c. **(3 punti)** si determinino gli α per cui la soluzione y_α del problema puó essere definita sul tutto $\mathbb{R}$.

• $y_0(x)=0$ è definita su tutto $\mathbb{R}$

•• $\alpha<0$: y_α in • è definita in $(-1,P_\alpha)$: si noti che $y'_\alpha(x)<0$ e che $\lim_{x\to P_\alpha^-} y_\alpha(x)=-\infty$. Quindi non si può prolungare a tutto $\mathbb{R}$

••• $\alpha>0$: y_α in • è definita in $(-1,\infty)$; si noti che $y'_\alpha(x)>0$, che $\lim_{x\to-1^+} y_\alpha(x)=0$ e che

$\lim_{x\to-1^+} y'_\alpha(x)=\lim_{x\to-1^+}\dfrac{e^\alpha-1}{1+(e^\alpha-1)(x+1)}=e^\alpha-1$

Vediamo se possiamo prolungare la soluzione (N.B. C^1) in $x<-1$

In $x<-1$ le soluzioni sono
$e^y-1=(x+1)\tilde K$ con $\tilde K\in\mathbb{R}$, cioè
$\tilde y(x)\overset{*}{=}\ln(1+\tilde K(x+1))$ per x tali che $x<-1$ e $1+\tilde K(x+1)>0$; cioè
se $\tilde K\le 0$, $\tilde y$ è definita $\forall x<-1$
se $\tilde K>0$ $\tilde y$ è definita in $(q_{\tilde K},-1)$
con $q_{\tilde K}=-1-\dfrac{1}{\tilde K}$

Vediamo se possiamo "attaccare" y_α con $\tilde y$ in modo C^1:

$\lim_{x\to-1^-}\tilde y(x)=0$ e $\lim_{x\to-1^-}\tilde y'(x)=\tilde K$

Deve quindi essere $e^\alpha-1=\tilde K$, cioè $\tilde K>0$. Ma $\lim_{x\to q_{\tilde K}^-}\tilde y(x)=-\infty$, quindi possiamo definire y_α in $(q_{e^\alpha-1},\infty)$ ma non in $\mathbb{R}$