Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
5 Luglio 2023

Tempo per la prova 2 ore e 30 minuti. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(9 punti)** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = |x| \log(1 + y).$$

   a. **(3 punti)** Si determinino i punti del dominio di f in cui essa é differenziabile;

   b. **(4 punti)** si determinino, se esistono, massimi e minini locali e globali;

   c. **(2 punti)** si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-1, 1)$.

2. **(8 punti)** Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ definita da

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n^a}\right).$$

a. **(2 punti)** Al variare di a si determini l'insieme E_a di convergenza puntuale e la funzione limite;

b. **(3 punti)** al variare di a si stabilisca se la convergenza é uniforme su E_a;

c. **(3 punti)** al variare di $a \neq 0$ si stabiliscano eventuali sottointervalli di E_a in cui la convergenza é uniforme.

3. **(7 punti)** Si consideri

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 4x^2 + 9y^2 < z < \sqrt{4x^2+9y^2} \right\}.$$

Si calcoli, se esiste,

$$\int_\Omega \frac{1}{z + 4x^2 + 9y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

4. **(8 punti)** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y' = \dfrac{e^y - 1}{e^y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a. **(1 punti)** Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione locale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

b. **(4 punti)** al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini, se esiste, la soluzione locale y_α del problema;

c. **(3 punti)** si determinino gli α per cui la soluzione y_α del problema puó essere definita sul tutto $\mathbb{R}$.