Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^5y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

• Unico punto che nec problem è $(0,0)$.

•• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 4 \lim_{(x,y)\to 00} \dfrac{(x^4)^{5/4}y^2}{(x^4+y^2)^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^4+y^2)^{\overbrace{\frac{5}{4}+1-2}^{>0}} = 0$

$\Rightarrow f$ è continua in $\mathbb{R}^2$

b. **(3 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

• f è nulla sui due assi cartesiani $\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$. Mi domando se

$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$?? Vedo che

$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 4 \lim_{h_1\to 0} \dfrac{h_1^5 h_1^4}{(h_1^4+h_1^4)^2\sqrt{h_1^2+h_1^4}} = \lim_{h_1\to 0} \dfrac{h_1^9}{h_1^8|h_1|}$ che $\nexists$

scelgo $h_2 = h_1^2$

$\Rightarrow$ NON DIFFEREN.

c. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nel suo dominio.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x,x^2) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^9}{(x^4+x^4)^2} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x,x^2) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^9}{(x^4+x^4)^2} = -\infty$

non esistono Massimi e Minimi assoluti

2. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = xy^2e^{-xy}$$

a. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nel suo dominio.

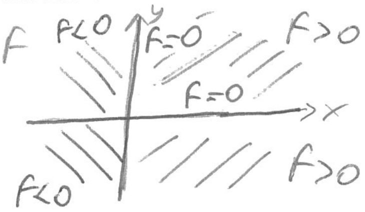
• Poiché $\lim_{y\to+\infty} f(-1,y) = \lim_{y\to+\infty} -y^2e^{y} = -\infty$

$\lim_{y\to-\infty} f(1,y) = \lim_{y\to-\infty} y^2e^{-y} = +\infty$ $\Rightarrow$ $\nexists$ Max e Min assoluti

b. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi relativi di f nel suo dominio.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-xy}y^2(1-xy) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-xy}xy(2-xy) = 0 \end{cases} \iff y=0$$

Studio il segno di f



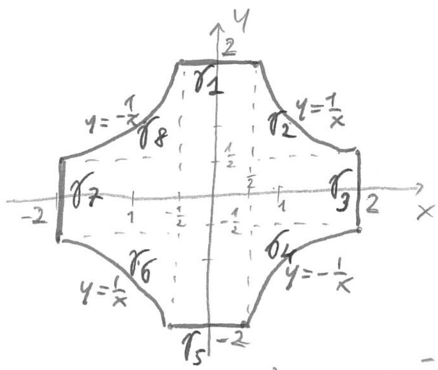
e scopro che i punti $(x_0,0)$ con $x_0>0$ sono Minimi relativi

i punti $(x_0,0)$ con $x_0<0$ sono Massimi relativi

il punto $(0,0)$ non è nulla

c. **(4 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nell'insieme:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |xy| \leq 1, \ \max(|x|,|y|) \leq 2\}.$$



• In int(D) gli unici punti che annullano il gradiente sono punti per cui f è nulla: non possono essere né Max né Min assoluti di f su D.

$\Rightarrow$ Max e Min assoluti (che esistono essendo f continua su D compatto) sono su $\partial D = \bigcup_{i=1}^{8} \gamma_i$

•• su γ_1 $f(x,2) = 4xe^{-2x} = g_1(x)$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$g_1'(x) = 4e^{-2x}(1-2x) > 0 \iff x < \frac{1}{2}$

su γ_2 $f(x,-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e^{-1}$ sempre decrescente, $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

su γ_3 $f(2,y) = 2y^2e^{-2y} = g_2(y)$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

$g_2'(y) = 4y(1-y)e^{-2y} > 0 \iff 0 < y < \frac{1}{2}$

su γ_4 $f(x,-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e$ sempre decrescente, $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

su γ_5 $f(x,-2) = 4xe^{2x} = g_4(x)$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$g_4'(x) = 4e^{2x}(1+2x) > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$

su γ_6 $f(x,\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e^{-1}$ sempre decrescente, $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

su γ_7 $f(-2,y) = -2y^2e^{2y} = g_3(y)$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

$g_3'(y) = -4ye^{2y}(y+1) > 0 \iff -\frac{1}{2} < y < 0$

su γ_8 $f(x,-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e$ sempre decrescente, $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$f(E) = 0$

$f(A) = f(\frac{1}{2},2) = 2e^{-1}$

$f(B) = f(\frac{1}{2},-2) = 2e^{1}$

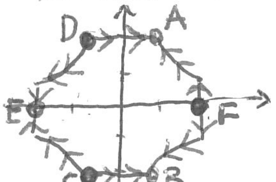
$f(F) = 0$

$f(C) = -f(A) = -2e^{-1}$

$f(D) = -f(B) = -2e$

A, B e E candidati ad essere Max assoluti

••• Quindi



D, C e F candidati ad essere Min assoluti

B Max Assoluto, D Min assoluto

3. **(8 punti)** Al variare del paramentro $a \in \mathbb{R}$ si consideri a serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \log^a n}.$$

a. **(2 punti)** Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di convergenza puntuale E_a della serie;

Si tratta di una serie di potenze con centro in $x_0 = 2$.
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\lg^a(n+1)} \cdot n \lg^a(n) = 1 \quad \forall a$ Quindi il raggio di convergenza è 1
e $\forall a$ la serie converge in $(1,3)$. per $x=3$ la serie converge solo per $a>1$
mentre per $x=1$ la serie converge per ogni a (*). $E_a = [1,3]$ per $a>1$
$E_a = [1,3)$ per $a \leq 1$

b. **(3 punti)** determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme della serie.

per $a>1$ abbiamo $\frac{|x-2|^n}{n \lg^a n} \leq \frac{1}{n \lg^a n}$ se $x \in [1,3]$
quindi per Weierstrass c'è convergenza uniforme in E_a.
per $a<1$ c'è convergenza uniforme in $[1,K]$ con $1 \leq K < 3$ per il Teorema di Abel, mentre non c'è convergenza uniforme in $[1,3)$ per il teorema del doppio limite.

c. **(3 punti)** Detta $S(x)$ la somma della serie per $a=0$, calcolare

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} S(x)dx$$

con un errore inferiore a 10^{-3}. Essendo $[\frac{3}{2}, 2]$ un intervallo di convergenza uniforme abbiamo

$$\int_{3/2}^{2} S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{3/2}^{2} \frac{(x-2)^n}{n} dx = \sum_{2}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}(n+1)n}$$

$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)n} < \frac{1}{1000}$ se $n=4$ quindi $\sum_{2}^{3} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}(n+1)n}$ fornisce l'approssimazione cercata

(*) per $x=1$ si ha $\sum \frac{(-1)^n}{n \lg^a n}$. È ovvio che, per $a \geq 0$, $\frac{1}{n \lg^a n} \downarrow 0$, mentre per $a<0$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x \lg^a x}\right) = -(1+a\log^{-1} x)\cdot x^{-2} \log^{-a} x < 0$ per

x abbastanza grande.

4. **(8 punti)** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$$

a. **(2 punti)** Stabilire l'insieme E di convergenza semplice e la funzione limite.

$f_n(0) = 0 \ \forall n$ per $x \neq 0$ $f_n(x) \sim \frac{n^2 x}{n^2 x^2} = \frac{1}{x}$; $f_n \to f$ $E = \mathbb{R}$

dove $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$

b. **(2 punti)** Stabilire se la convergenza é uniforme su E.

f_n sono continue su $\mathbb{R}$ mentre $f(x)$ non lo è: quindi non c'è convergenza uniforme su E

c. **(4 punti)** Stabilire se esistono intervalli in cui la convergenza risulta uniforme. (motivare la risposta)

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ (f_n sono limitate!)

Sia $[a,b]$ un intervallo. Per simmetria possiamo supporre $[a,b] \subset (0,+\infty)$ con $a > 0$ e $b \leq +\infty$

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{|x|(1+n^2x^2)}$ (sempre per simmetria considero $x > 0$)

Sia $g(x) = \frac{1}{x(1+n^2x^2)}$ risulta $g'(x) = -\frac{(1+3n^2x^2)}{x^2(1+n^2x^2)^2} < 0 \ \forall x$

quindi il massimo di $g(x)$ si ottiene per $x = a$

cioè $\sup_{x \in [a,b)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{a(1+n^2a^2)} \to 0$ per $n \to +\infty$

Quindi ogni intervallo chiuso che non contiene l'origine è di convergenza uniforme.