Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2022

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^5y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a. **(2 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

   b. **(3 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

   c. **(3 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nel suo dominio.

2. **(8 punti)** Sia

$$f(x, y) = xy^2 e^{-xy}$$

a. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nel suo dominio.

b. **(2 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi relativi di f nel suo dominio.

c. **(4 punti)** Si determinino, se esistono, i massimi e i minimi assoluti di f nell'insieme:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |xy| \leq 1, \ \max(|x|, |y|) \leq 2\right\}.$$

3. **(8 punti)** Al variare del paramentro $a \in \mathbb{R}$ si consideri a serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \log^a n}.$$

a. **(2 punti)** Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di convergenza puntuale E_a della serie;

b. **(3 punti)** determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme della serie.

c. **(3 punti)** Detta $S(x)$ la somma della serie per $a = 0$, calcolare

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} S(x) dx$$

con un errore inferiore a 10^{-3}.

4. **(8 punti)** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$$

a. **(2 punti)** Stabilire l'insieme E di convergenza semplice e la funzione limite.

b. **(2 punti)** Stabilire se la convergenza é uniforme su E.

c. **(4 punti)** Stabilire se esistono intervalli in cui la convergenza risulta uniforme. (motivare la risposta)