Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
SECONDA PROVA PARZIALE – 26 Gennaio 2023

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

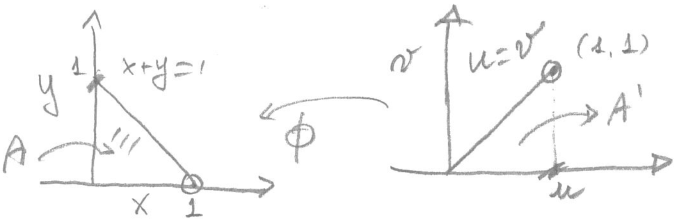
1. **(7 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri

$$\int_A \frac{\tan(x+y)}{x^{1-\alpha}(x+y)^{\alpha}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

con

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y \leq 1, \ y \geq 0, \ x \geq 0\}.$$

a. **(4 punti)** Si determinino gli $\alpha > 0$ per cui l'integrale esiste;



posto $\begin{cases} x+y = u \\ x = v \end{cases}$ $\quad \phi(u,v) = \begin{cases} x = v \\ y = u-v \end{cases}$

$$J\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\int_A = \int_{A'} \frac{\mathrm{tag}(u)}{u^{\alpha} \cdot v^{1-\alpha}} |\det J\phi| = \int_0^1 \frac{\mathrm{tag}\, u}{u^{\alpha}} \int_0^u v^{\alpha-1}\, dv = \int_0^1 \frac{\mathrm{tag}\, u}{u^{\alpha}} \cdot \frac{u^{\alpha}}{\alpha}\, du$$

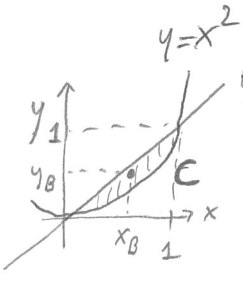
$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \mathrm{tg}\, u\, du \ \exists \text{ finito } \forall \alpha > 0$$

b. **(3 punti)** lo si calcoli per $\alpha = 1$.

$$\int_0^1 \mathrm{tag}\, u\, du = \Big[-\log|\cos u|\Big]_0^1 = -\log(\cos 1)$$

3. **(8 punti)** Sia
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 \le y \le x\}\,.$$
(x_B, y_B) Baricentro di C

a. **(3 punti)** Si determini il baricentro dell'insieme C. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto dalla rotazione di C intorno all'asse delle y; si calcoli il volume di D.



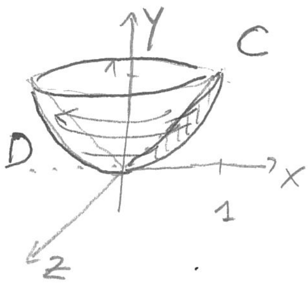
$$\text{Area}(C) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1\,dy\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$x_B = \frac{1}{\text{Area}(C)} \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,dy\,dx = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y_B = \frac{1}{\text{Area}(C)} \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dy\,dx = 6\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)dx = 6\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{5} \qquad (x_B, y_B) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{Vol}(D) = 2\pi\,\text{Area}(C)\,x_B = 2\pi \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

b. **(5 punti)** Si determini se esiste
$$\int_D \underbrace{\frac{|x|}{x^2 + y^2 + z^2}}_{= f(x,y,z)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
e in caso affermativo lo si calcoli.



$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \le y \le \sqrt{x^2+y^2}\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = y \end{cases} \Rightarrow r^2 < y < r \Rightarrow r \in [0,1]$$

Poiché $(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (-x,y,z) \in D$ e $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$, allora $\{x \ge 0 \Rightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{r^2}^{r} \frac{r\cos\theta}{r^2 + y^2} \cdot r\,dy\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 r \int_{r^2}^{r} \frac{\frac{1}{r}}{1 + \left(\frac{y}{r}\right)^2}\,dy\,dr = 4\int_0^1 r \arctg\left(\frac{y}{r}\right)\Big|_{r^2}^{r} dr =$$

$$= 4\int_0^1 \left(r\frac{\pi}{4} - r\arctg r\right)dr \underset{\text{per parti}}{=} 4\left(\frac{1}{8}\pi r^2 - \frac{r^2}{2}\arctan r + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\arctg r\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

4. **(8 punti)** Sia $a \geq 0$. Si consideri

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}e^{x-\sqrt{y}} = f(x,y) \\ y(0) = a \end{cases} \qquad R^+ = (0,+\infty)$$

a. **(3 punti)** Si provi che per ogni $a > 0$ esiste un'unica soluzione locale y_a del problema di Cauchy e la si determini esplicitamente.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} - e^{x-\sqrt{y}}$; $f \in \mathcal{C}^1(R \times R^+)$ quindi vale $\exists!$ locale $\forall a > 0$

$\frac{y' e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} = e^x \Rightarrow e^{\sqrt{y}} = e^x + c$ $\quad 1 + c = e^{\sqrt{a}} \Rightarrow c = e^{\sqrt{a}} - 1$ $\quad e^{\sqrt{y}} = e^x + e^{\sqrt{a}} - 1 > 0$ $\forall a \geq 0$

$\sqrt{y} = \log(e^x + e^{\sqrt{a}} - 1)$ solo se $e^x + e^{\sqrt{a}} - 1 \geq 1$ $\quad$ se $e^{\sqrt{a}} - 1 \geq 1$ ($a \geq \log^2 2$)

la disequazione è sempre vera! se $0 < a < \lg^2 2$ allora deve essere $x \geq \lg(2 - e^{\sqrt{a}})$

b. **(3 punti)** Stabilire tutti i valori di $a > 0$ per cui y_a é prolungabile a tutto $\mathbb{R}$ e discutere l'unicitá del prolungamento.

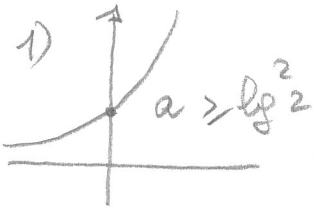
in definitiva 1) $y = \log^2(e^x + e^{\sqrt{a}} - 1)$ se $a \geq \log^2 2$ e $x \in R$

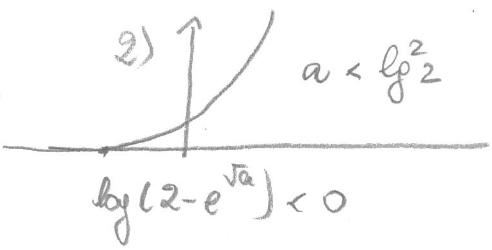
2) $y = \log^2(e^x + e^{\sqrt{a}} - 1)$ se $x \geq \log(2 - e^{\sqrt{a}})$ se $a < \lg^2 2$

Nel caso 1) la soluzione è definita su tutto R, è strettamente positiva e quindi è unica

Nel caso 2) la soluzione si annulla per $\bar{x}_a = \log(2 - e^{\sqrt{a}})$ inoltre si ha $y'(\bar{x}_a) = 0$ quindi c'è un raccordo $\mathcal{C}^1$ con la soluzione $y \equiv 0$

c. **(2 punti)** Determinare tutte le soluzioni locali del problema per $a = 0$.





per $a = 0$ abbiamo la soluzione $y \equiv 0$ e la soluzione $y = x^2$ definita SOLO per $x \geq 0$

Quindi le soluzioni locali sono $y \equiv 0$ e $y = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

Sia ora $x_0 > 0$. Consideriamo la funzione così definita:

$$y_0(x) = \begin{cases} \log^2(e^x + 1 - e^{x_0}) & \text{per } x > x_0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

ogni $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 0$

4. **(7 punti)**

a. **(3 punti)** Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 & \text{regolare} \\ \lambda = 1 \pm 2i & \text{regolare} \end{cases}$
- $\lambda = 1$, $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = \alpha \\ \beta = -\frac{3\alpha}{2} \end{matrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 1 + 2i$, $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \gamma = -i\beta \end{matrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2t \right] + c_3 e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t \right] \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^t \\ y(t) = e^t(-3c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t) \\ z(t) = e^t(2c_1 + c_2 \sin 2t - c_3 \cos 2t) \end{cases}}$$

b. **(2 punti)** Si stabilisca se esiste ed è unica la soluzione locale di

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Si determinino tutte le soluzioni locali del problema.

- Essendo un sistema lineare a coef costanti omogeneo, per ogni dato iniziale esiste unica la soluzione locale
- Si vede subito che $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$ soddisfa il sistema ed è quindi l'unica soluzione locale

c. **(2 punti)** Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases}$$

- la soluzione del sistema omogeneo associato è nel punto a.
- Cerchiamo una soluzione particolare del sistema

$x' = x + 1 \Rightarrow \tilde{x}_{PAR} = -1$ è soluzione particolare. Il sistema diventa $\begin{cases} y' = -2 + y - 2z \\ z' = -3 + 2y + z \end{cases}$

da cui $y'' = y' - 2z' = y' + 6 - 4y - 2z = y' + 6 - 4y + y' + 2 - y = 2y' - 5y + 8$

Quindi $y'' - 2y' + 5y = 8 \Rightarrow \tilde{y}_{PAR} = \frac{8}{5}$ ne è soluzione particolare

E quindi $z' = -3 + 2\left(\frac{8}{5}\right) + z = z + \frac{1}{5} \Rightarrow \tilde{z}_{PAR} = -\frac{1}{5}$ è soluzione particolare

- Quindi l'integrale generale è $\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^t - 1 \\ y(t) = e^t(-3c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t) + \frac{8}{5} \\ z(t) = e^t(2c_1 + c_2 \sin 2t - c_3 \cos 2t) - \frac{1}{5} \end{cases}$