

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
SECONDA PROVA PARZIALE – 26 Gennaio 2023

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti più significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordinati o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(7 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri

$$\int_A \frac{\tan(x+y)}{x^{1-\alpha}(x+y)^\alpha} dx dy$$

con

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}.$$

- a. **(4 punti)** Si determinino gli $\alpha > 0$ per cui l'integrale esiste;

- b. **(3 punti)** lo si calcoli per $\alpha = 1$.

2. (8 punti) Sia

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}.$$

a. (3 punti) Si determini il baricentro dell'insieme C . Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto dalla rotazione di C intorno all'asse delle y ; si calcoli il volume di D .

b. (5 punti) Si determini se esiste

$$\int_D \frac{|x|}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

e in caso affermativo lo si calcoli.

3. (8 punti) Sia $a \geq 0$. Si consideri

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}e^{x-\sqrt{y}} \\ y(0) = a \end{cases}$$

a. (3 punti) Si provi che per ogni $a > 0$ esiste un'unica soluzione locale y_a del problema di Cauchy e la si determini esplicitamente.

b. (3 punti) Stabilire tutti i valori di $a > 0$ per cui y_a é prolungabile a tutto \mathbb{R} e discutere l'unicit  del prolungamento.

c. (2 punti) Determinare tutte le soluzioni locali del problema per $a = 0$.

4. (7 punti)

a. (3 punti) Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases}$$

b. (2 punti) Si stabilisca se esiste ed è unica la soluzione locale di

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Si determinino tutte le soluzioni locali del problema.

c. (2 punti) Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z \end{cases}$$