

Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

**Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo**

**13 Febbraio 2023**

Cognome: \_\_\_\_\_ nome: \_\_\_\_\_

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \int_{-1}^1 (tx - u^2) dt \\ \dot{x} = x + u^2 \\ x(-1) = -\frac{2}{e} - 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max_u \int_0^T \sqrt{u} dt + \sqrt{x(T)} \\ \dot{x} = -u \\ x(0) = x_0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

for  $T$  and  $x_0$  positive and fixed.

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions

$$\mathcal{F} = \{V(t, x) = a\sqrt{x}, \text{ with } a = a(t)\}.$$

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k, \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con  $t_0$  e  $t_1$  fissati, nelle ipotesi che il control set  $U$  sia compatto e che  $f$ ,  $g$  e  $\psi$  siano limitate, uniformemente continue e Lipschitz rispetto a  $\mathbf{x}$  uniformemente rispetto a  $\mathbf{u}$ .

- i. Si introduca la nozione di soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi associato al problema assegnato;
- ii. sia  $V \in C^1$ ; si provi che essere soluzione del sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi é equivalente a essere soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi;
- iii. si provi che la funzione valore è soluzione viscosa (la dimostrazione dell'unicità non è richiesta) per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi.

4. (6 punti) Si consideri il seguente modello di produzione e gestione del magazzino:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^T (\alpha u^2 + \beta x) dt \\ \dot{x} = u \\ x(0) = A \\ x(T) = B \\ u \geq 0 \end{cases}$$

ove  $T > 0$ ,  $0 \leq A \leq B$  sono tutte costanti fisse.

- i. Si introduca con precisione il modello;
- ii. si risolva il modello proposto nel caso  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 4$ ,  $T = 2$ ,  $B = 2$  e  $|A| < 2$  (si noti che qui  $A$  puo' essere negativo).

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions

$$\mathcal{F} = \{V(t, x) = a(t-2)^3 + b(x+2)(t-2) + c\frac{(x-2)^2}{t-2}, \text{ with } a, b, c \text{ non zero constants } \}.$$

5. (6 punti) Si consideri il gioco differenziale a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), & \text{Player II: } \min_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) dt + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

dove  $T$  è fissato,  $U_i$  sono insiemi chiusi.

- i. Si fornisca la definizione di equilibrio di Nash per (1) nelle strategie open-loop; si fornisca, sotto opportune ipotesi, una condizione necessaria per avere un equilibrio di Nash nelle strategie open-loop.
- ii. Si consideri ora in particolare il modello "war of attrition and attack" di Isaacs:

$$\begin{cases} \text{Player A: } \max_{\alpha} J(\alpha, \beta), & \text{Player B: } \min_{\beta} J(\alpha, \beta) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 & 0 \leq \beta \leq 1 \\ J(\alpha, \beta) = \int_0^T (1-\alpha)x_1 - (1-\beta)x_2 dt \\ \dot{x}_1 = m_1 - c_1\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = m_2 - c_2\alpha x_1 \\ x_i(0) = x_{i0} > 0, \quad x_i(t) > 0 \end{cases}$$

con  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$  e  $m_2$  costanti positive, con  $c_2 > c_1$ ,  $T > 0$  fissato e grande.

- a. Si introduca il modello proposto;
- b. si determinino gli equilibri di Nash nella classe delle strategie open-loop.