Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

19 Giugno 2023

Cognome:____________________________ nome:____________________________

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min\limits_u \left(x_1(9) + 4x_2(9)\right) \\ \dot{x}_1 = -\frac{1}{3}x_2 - \left(t^2 - \frac{26}{3}t + 19\right) u \\ \dot{x}_2 = u \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}t + (x(1))^2 \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V(t,x) = h(t)x^2,\ h \in C^1(\mathbb{R})\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati, $U \subset \mathbb{R}^k$ chiuso.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1), con ipotesi minimali;
ii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Mangasarian e la si provi;
iii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Arrow e la si provi.

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema della "Dubin car":

$$\begin{cases} \min\limits_u T \\ \dot{x}_1 = \cos\theta \\ \dot{x}_2 = \sin\theta \\ \dot{\theta} = u \\ x_1(0) = 4, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \theta(0) = \pi/2 \\ x_1(T) = 0, \qquad x_2(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco di cattura–evasione

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}: \min\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}: \max\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{u}_1(t) \in U_1, \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \\ \qquad J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^{T_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \qquad \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad (0, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T} \\ \qquad (T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \in \partial\mathcal{T} \end{cases}$$

con target set $\mathcal{T}$ dato da

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$$

ove $\mathcal{T}_0$ è chiuso, con game set $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ e con $T_{\mathbf{x}}$ tempo di uscita della traiettoria; le funzioni f, g e ψ siano continue.

i. Si provi che la funzione valore V^- non dipende esplicitamente dal tempo, cioè

$$V^-(t, \mathbf{x}) = V^-(\mathbf{x}), \qquad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{G};$$

ii. si provi che

$$\mathcal{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n;$$

iii. si provi che se V^- è in $C^1(\mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0))$, allora l'equazione inferiore di Isaacs diventa

$$\begin{cases} H^-_{DP}(\mathbf{x}, \nabla V^-(\mathbf{x})) = 0 & \text{for } \mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0) \\ V^-(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in \mathcal{T}_0 \end{cases}$$