

# Robotica e Automazione: modulo di Automatica

## Corso di Laurea in Informatica - AA 2022/23

Prof. Pasquale Palumbo

### Contents

<b>1</b>	<b>Definizione di sistema</b>	<b>4</b>
1.1	Sistema come insieme di relazioni ingresso/uscita . . . . .	4
1.2	Sistema con lo spazio di stato . . . . .	6
1.3	Rappresentazioni esplicite e implicite . . . . .	7
1.4	Sistemi stazionari . . . . .	8
1.5	Sistemi lineari . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Sistemi lineari e stazionari</b>	<b>10</b>
2.1	Evoluzione libera: rappresentazioni esplicite . . . . .	11
2.1.1	Esempio: scarica di un condensatore . . . . .	12
2.2	Evoluzione libera: rappresentazioni implicite . . . . .	13
2.2.1	Passaggio esplicito-implicito (e viceversa) a tempo discreto . . . . .	14
2.2.2	Esempio: la sequenza di Fibonacci . . . . .	14
2.2.3	Esempio: modello SIR di propagazione iniziale di un'epidemia . . . . .	16
2.2.4	Passaggio esplicito-implicito (e viceversa) a tempo continuo . . . . .	17
2.2.5	Esempio: piccole oscillazioni libere di un giunto . . . . .	19
2.3	Risposta forzata per i sistemi a tempo discreto . . . . .	19
2.3.1	Passaggio esplicito-implicito (e viceversa) . . . . .	21
2.3.2	Esempio: modello SIR di propagazione iniziale di un'epidemia, calcolo dei suscettibili . . . . .	22
2.3.3	Esempio: dinamica di una popolazione studentesca . . . . .	23
2.3.4	Esempio: dinamica di estinzione un debito . . . . .	26
2.4	Risposta forzata per i sistemi a tempo continuo . . . . .	27
2.4.1	Passaggio esplicito-implicito (e viceversa) a tempo continuo . . . . .	28
2.4.2	Esempio: Circuito RLC in serie . . . . .	29
2.4.3	Esempio: Moto di un corpo in caduta libera . . . . .	30
2.5	Modi naturali . . . . .	31
2.5.1	Decomposizione spettrale (autovalori distinti) . . . . .	31
2.5.2	Modi naturali reali . . . . .	33
2.5.3	Modi naturali complessi coniugati . . . . .	34
2.5.4	Eccitabilità e osservabilità dei modi naturali . . . . .	35
2.5.5	Il caso di autovalori multipli . . . . .	36
2.5.6	Esempio: Modi naturali nel circuito RLC in serie . . . . .	37

2.6	Discretizzazione di un sistema a tempo continuo . . . . .	38
2.7	Transitorio e regime . . . . .	39
2.7.1	Risposta a regime all'impulso . . . . .	40
2.7.2	Risposta a regime al gradino . . . . .	41
2.7.3	Risposta a regime a una rampa lineare . . . . .	41
2.7.4	Risposta a regime a un'esponenziale . . . . .	42
2.7.5	Risposta armonica . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Sistemi lineari stazionari a tempo continuo: approccio in frequenza</b>	<b>43</b>
3.1	Trasformata di Laplace . . . . .	43
3.2	Trasformate di segnali . . . . .	44
3.3	Risposta in frequenza di un sistema lineare stazionario a tempo continuo . . . . .	45
3.3.1	Esempio . . . . .	47
3.4	Interpretazione con la trasformata di Laplace di alcune risposte a regime permanente	49
3.4.1	Risposta a regime all'impulso . . . . .	49
3.4.2	Risposta a regime al gradino . . . . .	49
3.4.3	Risposta a regime a un'esponenziale . . . . .	49
3.4.4	Risposta armonica . . . . .	50
3.5	Diagrammi di Bode . . . . .	51
3.5.1	Guadagno di Bode $K$ . . . . .	51
3.5.2	Termine monomio . . . . .	53
3.5.3	Termine binomio . . . . .	53
3.5.4	Termine trinomio . . . . .	55
3.5.5	Esempio di diagramma di Bode con termini monomi e binomi . . . . .	60
3.5.6	Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio smorzato . . . . .	63
3.5.7	Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio non smorzato . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Punti di equilibrio e Stabilità</b>	<b>69</b>
4.1	Punti di equilibrio . . . . .	69
4.2	Stabilità . . . . .	70
4.3	Linearizzazione attorno a un punto di equilibrio stabile asintoticamente . . . . .	71
4.4	Punti di equilibrio per sistemi lineari stazionari . . . . .	72
4.5	Stabilità per sistemi lineari stazionari a tempo continuo: il criterio di Routh . . . . .	73
4.5.1	Il caso di uno zero in prima colonna nella tabella di Routh . . . . .	75
4.5.2	Il caso di una riga tutta nulla nella tabella di Routh . . . . .	76
4.5.3	Scelta della regione per le radici . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Stabilità per sistemi lineari stazionari a retroazione a tempo continuo</b>	<b>82</b>
5.1	Feedback a retroazione unitaria . . . . .	83
5.2	Stabilità dei sistemi a controreazione unitaria: il Criterio di Nyquist per sistemi Single Input Single Output (SISO) . . . . .	85
5.2.1	Assenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto . . . . .	86
5.2.2	Diagrammi polari . . . . .	87
5.2.3	Esempi di diagrammi polari senza poli immaginari . . . . .	88
5.2.4	Presenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto . . . . .	92
5.3	Margini di stabilità . . . . .	97
5.3.1	Reti anticipatrici per aumentare il margine di fase . . . . .	102

5.4	Il criterio di Routh per sistemi in controreazione unitaria . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Specifiche di controllo a controreazione per sistemi SISO</b>	<b>105</b>
6.1	Fedeltà di risposta . . . . .	105
6.1.1	Fedeltà di risposta a ingressi canonici di tipo $k$ . . . . .	105
6.2	Reiezione di disturbi . . . . .	108
6.3	Specifiche sulla risposta al transitorio: risposta al gradino . . . . .	110
6.4	Regolatori PID . . . . .	112
6.4.1	Regolatori PI per sistemi di cui si conosce la funzione di trasferimento . . . . .	113
6.4.2	Regolatori PID per sistemi di cui non si conosce la funzione di trasferimento . . . . .	116
<b>7</b>	<b>Motore in corrente continua</b>	<b>117</b>
7.1	Principio di funzionamento di un motore elettrico in corrente continua . . . . .	117
7.2	Modello di un motore in corrente continua . . . . .	118
7.3	Controllo di un motore in corrente continua . . . . .	122
7.3.1	Controllo di velocità . . . . .	122

# 1 Definizione di sistema

In questo capitolo si fornisce la definizione rigorosa di **sistema** come *astrazione matematica* (o *modello*) che ha lo scopo di descrivere uno specifico fenomeno nel tempo (che sia di tipo fisico, chimico, biologico o altro).

## 1.1 Sistema come insieme di relazioni ingresso/uscita

Ogni sistema necessita di (almeno) tre insiemi opportunamente definiti. Il primo di questi è l'**asse dei tempi**  $T$ , ossia il dominio temporale entro cui si svolge il fenomeno che si desidera formalizzare con il modello matematico. Una prima distinzione riguarda la natura *continua* o *discreta* del tempo. Nel primo caso stiamo descrivendo fenomeni che evolvono in modo continuo nel tempo quali, ad esempio, posizione e velocità di un elemento materiale nello spazio, tensione e correnti in un circuito elettrico, posizione e velocità angolare di un giunto meccanico, ecc. In tutti questi casi l'asse dei tempi è un sottinsieme dei numeri reali,  $T \subseteq \mathbb{R}$ .

Nel secondo caso stiamo descrivendo grandezze che variano in modo discreto nel tempo; generalmente, la natura discreta del tempo è frutto del meccanismo di descrizione del fenomeno piuttosto che del fenomeno stesso: il numero di infetti di un'epidemia può essere descritto giorno per giorno (o settimana per settimana, mese per mese, ecc.), e lo stesso può dirsi della velocità angolare di un giunto, in cui supponiamo di acquisire i dati ogni 5 minuti. Va sottolineato che la sequenza degli istanti discreti non è detto che sia equispaziata (come nei casi precedenti): relativamente alle acquisizioni delle misure durante un esperimento in cui abbiamo la perturbazione di un equilibrio, è preferibile avere inizialmente un campionamento più fine (perché le dinamiche di sistema sono più veloci) e poi un campionamento più lasco (perché si sta raggiungendo un *plateau*). Ad esempio nell'*Intra-Venous Glucose Tolerance Test*, a fronte dell'iniezione di un bolo di glucosio per endovena (al tempo  $t = 0$ ), si acquisiscono misure di glucosio e insulina nel plasma secondo i tempi (in minuti):

$$T = \{-30, -15, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180\}$$

Per questi esempi di sistemi a tempo discreto l'asse dei tempi è un sottinsieme degli interi relativi  $T \subseteq \mathbb{Z}$ ; in altri casi l'asse dei tempi può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottinsieme degli interi relativi: ad esempio, se considero misure acquisite ogni minuto e mezzo per un'ora, posso rappresentare l'asse dei tempi come:

$$T = \{0, 1.5, 3, 4.5, \dots, 58.5, 60\} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{40}\} \longleftrightarrow \{0, 1, 2, \dots, 40\} \subset \mathbb{Z}$$

con  $t_k = k\Delta$  e  $\Delta = 1.5\text{min}$ .

Sia a tempo continuo che a tempo discreto l'asse dei tempi può essere *finito* (ad esempio  $T = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  nel tempo continuo, oppure  $T = \{1, 2, 3, \dots, 364, 365\} \subset \mathbb{Z}$  nel tempo discreto) o *infinito* (ad esempio  $T = [t_1, +\infty) \subset \mathbb{R}$  nel tempo continuo, oppure  $T = \{10, 11, 12, \dots\} \subset \mathbb{Z}$  nel tempo discreto). Nel caso in cui l'asse dei tempi faccia esplicito riferimento a un istante iniziale (in cui inizia l'esperimento o in cui avviene la perturbazione che crea dinamica nelle variabili di sistema), l'asse dei tempi può brevemente scriversi col seguente formalismo, come l'insieme degli istanti di tempo maggiori o uguali a un valore iniziale  $t_0$ :

$$T(t_0) = \{t \in T : t \geq t_0\}$$

e tale formalismo vale sia a tempo continuo che a tempo discreto.

Il secondo insieme è l'insieme  $U$  dei valori degli **ingressi (input)**. Gli ingressi rappresentano le sollecitazioni al sistema, e possono essere ingressi noti, oppure disturbi (sconosciuti, o solo parzialmente conosciuti), oppure gli ingressi di controllo attraverso cui vogliamo soddisfare determinate specifiche. Anche in questo caso gli ingressi possono avere natura continua o discreta: nel primo caso abbiamo a che fare con grandezze che possono variare con continuità in sottoinsiemi dei numeri reali  $U \subseteq \mathbb{R}$  (ad esempio posizioni, velocità, flussi, correnti, ecc.); nel secondo caso abbiamo a che fare con grandezze che variano in modo discreto (ad esempio, lo stato on/off di un componente digitale, i diversi livelli di quantizzazione con cui un attuatore fornisce l'ingresso a un sistema, ecc.). Nel prosieguo continueremo a utilizzare il formalismo di  $U \subseteq \mathbb{R}$  anche per ingressi a valore discreto, sacrificando il contenuto meno informativo di una tale notazione. Nel caso in cui ci siano  $p$  ingressi distinti che eccitano il sistema (ad esempio, controllo la dinamica di un robot attraverso azioni su più motori), avremo  $U \subseteq \mathbb{R}^p$ . Volendo considerare l'insieme delle funzioni in ingresso a partire da un istante  $t_0$ , scriveremo

$$u : T(t_0) \mapsto U, \quad u \in U^{T(t_0)}$$

È bene sottolineare come la notazione  $u$  può indicare *sia* il valore della funzione ( $u \in U$ ), che la funzione stessa ( $u \in U^{T(t_0)}$ ). Talvolta, per togliere questa ambiguità, a discapito della leggerezza della notazione, possiamo indicare la funzione come  $u(\cdot)$ .

Infine, c'è l'insieme  $Y$  dei valori delle **uscite (output)**. Le uscite possono rappresentare determinate grandezze di interesse del sistema (che vogliamo monitorare o controllare), oppure le uscite accessibili che possiamo misurare. Analogamente all'insieme dei valori degli ingressi, anche l'insieme dei valori delle uscite può essere continuo o discreto (e valgono gli stessi esempi fatti in precedenza); in aggiunta, trattandosi di misure, la natura discreta o continua dipende dall'accuratezza del dispositivo di acquisizione dati, e se il dispositivo opera una quantizzazione oppure no. Nel caso in cui ci siano  $q$  uscite distinte, avremo  $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ . Volendo considerare l'insieme delle funzioni in uscita a partire da un istante  $t_0$ , scriveremo

$$y : T(t_0) \mapsto Y, \quad y \in Y^{T(t_0)}$$

La terna di questi tre insiemi consente la seguente definizione di sistema come insieme di relazioni ingresso/uscita. La definizione usa il *troncamento* di una funzione, ossia, data una  $u \in U^{T(t_0)}$ , il suo troncamento su  $\tau \subseteq T(t_0)$ , definito come  $u|_\tau \in U^\tau$  consiste nella porzione di funzione limitata al periodo  $\tau$ .

**Definizione 1.1** - *Sia data la terna  $(T, U, Y)$  dove  $T$  è l'asse dei tempi e  $U, Y$  sono gli insiemi dei valori degli ingressi e delle uscite. Si definisce **sistema** l'insieme delle relazioni*

$$\mathcal{S} = \{S_{t_0} \subseteq U^{T(t_0)} \times Y^{T(t_0)}, t_0 \in T\}$$

*che sia chiuso rispetto al **troncamento**, ossia*

$$\forall t_0 \in T, \forall (u_0, y_0) \in S_{t_0}, \forall t_1 \in T(t_0), \implies (u_0|_{T(t_1)}, y_0|_{T(t_1)}) \in S_{t_1}$$

Si noti che, nella definizione di sistema,  $S_{t_0}$  rappresenta l'insieme delle coppie delle funzioni ingresso/uscita a partire da un istante  $t_0$ , mentre il sistema  $\mathcal{S}$  rappresenta tutti i possibili insiemi  $S_{t_0}$  al variare di  $t_0 \in T$ .

## 1.2 Sistema con lo spazio di stato

Con la definizione di *sistema* come *insieme delle relazioni ingresso/uscita*, può accadere che ad uno stesso ingresso possano essere associate più funzioni di uscita. Ad esempio, considero come sistema la dinamica di un oggetto nello spazio, definendolo come l'insieme delle relazioni tra le forze che agiscono su di esso (ingressi) e la sua traiettoria nello spazio (uscita). Se considero sempre gli stessi ingressi (la forza di gravità) per una mela, la sua traiettoria può essere molto diversa: un punto (se la mela è ferma su un tavolo); un moto uniformemente accelerato se parte ferma da un punto sopra il tavolo; un moto parabolico se parte da sopra il tavolo con una velocità trasversale diversa da zero, e così via. Oppure, se considero il sistema glucosio/insulina, e immagino di fare l'esperimento "bere un bicchiere di latte" appena sveglio al mattino, oppure alla fine di un pranzo, a fronte di uno stesso ingresso (l'ingestione del glucosio dal latte), io avrò un'uscita (l'andamento del glucosio nel sangue) differente nei due casi, perché al mattino sono in una situazione di normoglicemia, mentre dopo pranzo sono in fase iperglicemica.

Questa ambiguità impedisce di fare predizioni sulla base dei soli ingressi che eccitano il sistema, e può essere superata introducendo il concetto di **stato** (nel caso della mela bisogna conoscere posizione e velocità iniziale, nel caso del sistema glucosio/insulina dobbiamo conoscere glicemia e insulinemia al momento in cui si beve il latte). Più formalmente, le **variabili di stato** a un dato istante  $t$  riassumono tutta la storia passata del sistema e permettono, dato l'ingresso, di calcolare lo stato negli istanti futuri a partire da quell'istante iniziale. Anche per l'insieme  $X$  dei valori dello stato valgono le considerazioni sulla loro natura continua o discreta e, in caso di  $n$  variabili di stato, avremo, senza perdita di generalità,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.2** - Sia dato l'asse dei tempi  $T$  e la terna  $(U, Y, X)$  degli insiemi dei valori degli ingressi, delle uscite e dello stato. Sia dato l'insieme  $\mathcal{U}$  delle funzioni di ingresso

$$\mathcal{U} = \{u \in U^{T(t_0)}, t_0 \in T\}$$

Sia data la **funzione di transizione dello stato**

$$\varphi : (T \times T)^* \times X \times \mathcal{U} \mapsto X, \quad (T \times T)^* = \{(t, t_0) \in T \times T : t \geq t_0\}$$

che aggiorna lo stato all'istante  $t$  a partire da un istante precedente  $t_0 \leq t$ , a partire dallo stato iniziale  $x_0$  ed eccitato dalla funzione di ingresso  $u \in \mathcal{U}$

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u)$$

e sia data la **funzione di trasformazione di uscita**

$$\eta : T \times X \times U \mapsto Y$$

che fornisce l'uscita al tempo  $t$  in funzione dell'istante attuale  $t$ , dello stato attuale  $x(t)$  e dell'ingresso attuale  $u(t)$ :

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

La  $\gamma$ -pla  $\mathcal{S} = (T, U, Y, X, \mathcal{U}, \varphi, \eta)$  definisce un **sistema nello spazio di stato** se valgono le seguenti proprietà:

**1) consistenza:**

$$\forall t = t_0, \forall x \in X, \forall u \in \mathcal{U} \implies \varphi(t, t, x, u) = x$$

Quindi, in virtù della proprietà di consistenza, possiamo sempre assumere che

$$\varphi(t, t_0, x, u) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u)$$

**2) causalità:**

$$\begin{aligned} \forall (t, t_0) \in (T \times T)^*, \quad \forall x \in X, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} : u_1|_{[t_0, t]} = u_2|_{[t_0, t]} \\ \implies \varphi(t, t_0, x, u_1) = \varphi(t, t_0, x, u_2) \end{aligned}$$

Quindi, in virtù della proprietà di causalità, possiamo sempre assumere che

$$\varphi(t, t_0, x, u) = \varphi(t, t_0, x, u|_{[t_0, t]})$$

**3) separazione:**

$$\begin{aligned} \forall t_0 \leq t_1 \leq t \in T, \quad \forall x_0 \in X, \quad \forall u \in \mathcal{U} \\ \implies \varphi(t, t_0, x_0, u|_{[t_0, t]}) = \varphi(t, t_1, x(t_1), u|_{[t_1, t]}) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0, u|_{[t_0, t_1]}), u|_{[t_1, t]}) \end{aligned}$$

Le tre proprietà sopra elencate sono necessarie per garantire proprietà intuitive necessarie affinché il sistema abbia senso. La *consistenza* garantisce che la funzione di aggiornamento dello stato non vari se l'istante attuale coincide con l'istante iniziale; la *causalità* impedisce che lo stato all'istante attuale possa dipendere da valori futuri della funzione di ingresso; la *separazione* garantisce che, mantenendo sempre lo stesso ingresso  $u \in \mathcal{U}$ , se parto da  $x_0$  all'istante  $t_0$  e arrivo a  $x$  all'istante  $t$ , posso “spezzare” la traiettoria arrivando da  $(t_0, x_0)$  a un punto intermedio  $(t_1 \geq t_0, x_1 = x(t_1))$  e poi ripartire da  $(t_1, x_1)$  per arrivare allo stesso punto  $(t, x)$ . La proprietà di separazione mi garantisce di poter fare una concatenazione di esperimenti sul sistema.

Le funzioni  $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  e  $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$  dipendono da *parametri*, che ne caratterizzano la forma. Di solito questi parametri hanno anche uno specifico significato fisico/chimico/biologico/ecc.

### 1.3 Rappresentazioni esplicite e implicite

Dato un sistema nello spazio di stato, le equazioni

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t]}) \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

ne danno una **rappresentazione esplicita**, perché consentono di calcolare *direttamente* lo stato attuale (al tempo  $t$ ) a partire da qualunque altra coppia  $(t_0, x(t_0))$ , conoscendo gli ingressi al sistema a partire dall'istante iniziale  $t_0$ .

Parliamo, invece, di **rappresentazione implicita** quando viene descritta la velocità di variazione dello stato, piuttosto che la sua transizione. Nel caso dei sistemi a tempo discreto, tale rappresentazione si scrive facilmente. Supponendo, senza perdita di generalità,  $T = \mathbb{N}$ :

$$x(t+1) = \varphi(t+1, t, x(t), u|_{[t, t+1]}) = f(t, x(t), u(t))$$

per un'opportuna  $f : T \times X \times U \mapsto X$ . La rappresentazione implicita per un sistema a tempo discreto è, dunque,

$$\begin{cases} x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

È bene notare come la funzione  $f(\cdot, \cdot, \cdot)$  descrive come si calcola ogni singolo aggiornamento da  $t$  al successivo  $t+1$  (piuttosto che ogni generica transizione da  $t_0$  a  $t$ ), per cui necessita dell'inizializzazione fornita dallo stato iniziale  $x(t_0)$  per fornire una descrizione completa del sistema.

Nel caso di sistemi a tempo continuo, avere una rappresentazione implicita significa poter scrivere una equazione differenziale ordinaria del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

per cui la funzione di transizione dello stato  $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u)$  ne sia l'unica soluzione. Quando ciò è possibile, parliamo di sistemi **regolari**, la cui rappresentazione implicita è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

Le rappresentazioni implicite sono il modo più intuitivo per scrivere e descrivere un modello.

## 1.4 Sistemi stazionari

I sistemi stazionari sono sistemi per cui l'evoluzione dello stato e dell'uscita non dipendono dall'istante iniziale, ma dalla durata dell'esperimento: se inizio un esperimento questa mattina, o questa sera, o tra un mese, a parità di condizioni al contorno ho sempre gli stessi risultati. La sua definizione formale passa attraverso la definizione di *funzione traslata*, ossia: data una funzione d'ingresso  $u \in \mathcal{U}$  e un istante di tempo  $\Delta \in \mathbb{R}$ , definiamo  $\delta_\Delta u \in \mathcal{U}$  la funzione traslata

$$\delta_\Delta u(t) = u(t - \Delta)$$

**Definizione 1.3** - *Un sistema con lo spazio di stato è **stazionario** se*

- (i)  $\forall (t, t_0) \in (T \times T)^*, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}$   
 $\implies \varphi(t + \Delta, t_0 + \Delta, x, \delta_\Delta u|_{[t_0 + \Delta, t + \Delta]}) = \varphi(t, t_0, x, u|_{[t_0, t]})$
- (ii)  $\forall t \in T, \quad \forall x \in X, \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{U}, \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}$   
 $\implies \eta(t + \Delta, x, \bar{u}) = \eta(t, x, \bar{u})$

Da cui segue che, scegliendo  $\Delta = -t_0$  abbiamo:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x, u|_{[t_0, t]}) = \varphi(t - t_0, 0, x, \delta_{-t_0} u|_{[0, t - t_0]})$$

ossia, ai fini della funzione di transizione dello stato, conta solo lo scostamento  $t - t_0$  e non i due singoli istanti di tempo. Per questo motivo, la funzione di transizione dello stato per sistemi stazionari può supporre che parta sempre dall'istante  $t_0 = 0$  senza perdita di generalità:

$$x(t) = \varphi(t, 0, x(0), u|_{[0, t]})$$

Per i sistemi stazionari, dunque, è possibile ridefinire la funzione di transizione dello stato con un dominio leggermente diverso:

$$\varphi : T \times X \times \mathcal{U} \mapsto X, \quad x(t) = \varphi(t, x(0), u|_{[0, t]})$$

Analogamente, scegliendo  $\Delta = -t$  nella trasformazione di uscita:

$$y(t) = \eta(t, x, \bar{u}) = \eta(0, x, \bar{u}), \quad \forall x \in X, \quad \bar{u} \in U$$

per cui la funzione di trasformazione di uscita non dipende esplicitamente dal tempo. Anche in questo caso, per i sistemi stazionari, è possibile ridefinire la funzione di trasformazione dell'uscita con un dominio leggermente diverso:

$$\eta : X \times U \mapsto Y, \quad y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

Riassumendo, la rappresentazione esplicita di un sistema stazionario è:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t, x(0), u|_{[0,t]}) \\ y(t) = \eta(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Per quel che riguarda le rappresentazioni implicite, a tempo discreto avremo:

$$x(t+1) = \varphi(t+1-t, x(t), u|_{[t,t+1]}) = \varphi(1, x(t), u(t)) = f(x(t), u(t))$$

per un'opportuna  $f : X \times U \mapsto X$ . Per cui, la rappresentazione implicita per un sistema a tempo discreto stazionario si semplifica in

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)), & x(0) = x_0 \\ y(t) = \eta(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Analogamente, nel caso dei sistemi a tempo continuo stazionari, l'equazione differenziale ordinaria ad essi associata perde la dipendenza esplicita dal tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & x(0) = x_0 \\ y(t) = \eta(x(t), u(t)) \end{cases}$$

I sistemi *non stazionari* sono sistemi le cui evoluzioni dipendono esplicitamente dal tempo. Ad esempio, se un esperimento è influenzato dalla temperatura nella stanza, in assenza di un termostato, fare l'esperimento a mezzogiorno o a mezzanotte può alterare i risultati. Oppure ci sono sistemi per cui i parametri variano nel tempo: nei sistemi che descrivono lo sviluppo di un'epidemia, alcuni parametri sono il tasso di infettività e il tasso di mortalità; il primo varia con il passare del tempo perché varia la percezione della malattia e la sensibilità al distanziamento, mentre il secondo varia perché c'è una migliore conoscenza della malattia e delle sue cure.

## 1.5 Sistemi lineari

I sistemi lineari sono sistemi per cui vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*. Ad esempio, se eccito il sistema con due ingressi distinti, la sua evoluzione può essere scritta come la somma delle due evoluzioni ottenute come se ci fosse un ingresso per volta. Di seguito ne diamo una definizione rigorosa.

**Definizione 1.4** - *Un sistema nello spazio di stato è lineare se:*

1) la funzione di transizione dello stato è lineare rispetto a  $X \times U$ :

$$\varphi(t, t_0, x(t_0), u|_{[t_0, t]}) = \varphi(t, t_0, x(t_0), 0|_{[t_0, t]}) + \varphi(t, t_0, 0, u|_{[t_0, t]})$$

ossia l'evoluzione dello stato può decomporre nella sua **evoluzione libera**

$$\varphi_{\text{lib}} : (T \times T)^* \times X \mapsto X, \quad \varphi_{\text{lib}}(t, t_0, x(t_0)) = \varphi(t, t_0, x(t_0), 0|_{[t_0, t]})$$

(che dipende linearmente dal solo stato iniziale, supponendo nullo l'ingresso) + la sua **evoluzione forzata**

$$\varphi_{\text{for}} : (T \times T)^* \times U \mapsto X, \quad \varphi_{\text{for}}(t, t_0, u|_{[t_0, t]}) = \varphi(t, t_0, 0, u|_{[t_0, t]})$$

(che dipende linearmente dalla sola funzione di ingresso, supponendo nullo lo stato iniziale);

2) la funzione di trasformazione dell'uscita è lineare rispetto a  $X \times U$ :

$$\eta(t, x(t), u(t)) = \eta(t, x(t), 0) + \eta(t, 0, u(t))$$

ossia l'evoluzione dello stato può decomporre nella sua **componente dinamica**

$$\eta_1 : T \times X \mapsto Y, \quad \eta_1(t, x(t)) = \eta(t, x(t), 0)$$

(che dipende linearmente dal solo stato all'istante attuale, supponendo nullo l'ingresso all'istante attuale) + la sua **componente diretta**

$$\eta_2 : T \times U \mapsto Y, \quad \eta_2(t, u(t)) = \eta(t, 0, u(t))$$

(che dipende linearmente dal solo ingresso all'istante attuale, supponendo nullo lo stato all'istante attuale).

Nei sistemi lineari, la decomposizione dell'evoluzione dello stato nella risposta in evoluzione libera + quella in evoluzione forzata è lo specchio del tipo di perturbazione che possiamo creare in un sistema a partire da una situazione di equilibrio: una perturbazione può essere prodotta da una variazione dello stato (ad esempio mettiamo un giunto non controllato in una posizione di non-equilibrio) oppure da un ingresso al sistema (ad esempio accendiamo un azionamento su un giunto). Se il sistema è lineare, posso disaccoppiare i due effetti, altrimenti non posso e le risposte alle due cause distinte di perdita dell'equilibrio sono interlacciate.

## 2 Sistemi lineari e stazionari

In virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, posso considerare separatamente la risposta in evoluzione libera da quella forzata. Cominciamo con la caratterizzazione dell'evoluzione libera di stato e uscita; quanto segue vale sia per i sistemi a tempo discreto, che per quelli a tempo continuo. Di seguito, entreremo nei dettagli della risposta forzata, distinguendo tra sistemi stazionari a tempo discreto e a tempo continuo.

## 2.1 Evoluzione libera: rappresentazioni esplicite

Consideriamo la funzione di transizione dello stato per l'evoluzione libera dei sistemi lineari. Sfruttando la stazionarietà, vale la proprietà

$$\varphi_{\text{lib}}(t, t_0, x_0) = \varphi_{\text{lib}}(t - t_0, 0, x_0)$$

per cui è possibile descrivere l'evoluzione libera tramite la seguente ridefinizione della  $\varphi_{\text{lib}}$ :

$$x_{\text{lib}}(t) = \varphi_{\text{lib}}(t, x_0), \quad \varphi_{\text{lib}} : T \times X \mapsto X, \quad x_0 = x(0)$$

Sfruttando la linearità della  $\varphi_{\text{lib}}$  rispetto al vettore  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , possiamo esplicitare tale relazione attraverso la **matrice di transizione dello stato** (ogni trasformazione lineare di un vettore può scriversi come il prodotto di un'opportuna matrice per il vettore):

$$x_{\text{lib}}(t) = \Phi(t)x_0, \quad \Phi(t) : T \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$$

Per quel che riguarda l'uscita, dalla linearità possiamo scrivere l'evoluzione libera dell'uscita come legata al solo stato iniziale

$$y_{\text{lib}}(t) = \eta_1(t, x_{\text{lib}}(t))$$

da cui, per la stazionarietà del sistema, segue che

$$\eta_1(t, x_{\text{lib}}(t)) = \eta_1(0, x_{\text{lib}}(t))$$

e, quindi, tramite un'opportuna ridefinizione della componente dinamica  $\eta_1$

$$y_{\text{lib}}(t) = \eta_1(x_{\text{lib}}(t)), \quad \eta_1 : X \mapsto Y$$

Sfruttando la linearità della  $\eta_1$  rispetto al vettore  $x_{\text{lib}}(t) \in \mathbb{R}^n$ , possiamo esplicitare tale relazione attraverso un'opportuna matrice  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  per cui:

$$y_{\text{lib}}(t) = Cx_{\text{lib}}(t) = C\Phi(t)x_0 = \Psi(t)x_0, \quad \text{con} \quad \Psi(t) = C\Phi(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$$

La matrice  $\Psi(t)$  è detta **matrice di transizione stato/uscita**.

Le matrici  $\Phi$  e  $\Psi$  godono delle proprietà elencate nella seguente proposizione.

**Proposizione 2.1** - *Le matrici di transizione dello stato e di transizione stato/uscita godono delle seguenti proprietà:*

i) **consistenza:**

$$\Phi(0) = I_n, \quad \Psi(0) = C$$

(la notazione  $I_n$  riguarda le matrici identità di dimensione  $n \times n$ ).

ii) **semigruppato:**

$$\Phi(\tau_1 + \tau_2) = \Phi(\tau_1)\Phi(\tau_2) = \Phi(\tau_2)\Phi(\tau_1), \quad \forall \tau_1, \tau_2 \geq 0$$

$$\Psi(\tau_1 + \tau_2) = \Psi(\tau_1)\Phi(\tau_2) = \Psi(\tau_2)\Phi(\tau_1), \quad \forall \tau_1, \tau_2 \geq 0$$

**Dimostrazione** - (i) Dalla proprietà di consistenza di un sistema, ponendo  $t = 0$  deve essere:

$$x(t)|_{t=0} = \Phi(t)|_{t=0} \cdot x(0) \quad \implies \quad x(0) = \Phi(0)x(0), \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

per cui la proprietà di consistenza della  $\Phi$  segue dall'arbitrarietà di  $x(0)$ . La consistenza della  $\Psi$  segue di conseguenza:

$$\Psi(0) = C\Phi(0) = C$$

(ii) Dalla proprietà di separazione di un sistema, dati  $0 \leq t_1 \leq t$ ,  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ , posto  $u = 0$ , avremo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) \\ &= \Phi(t-t_1)x(t_1) = \Phi(t-t_1)\Phi(t_1)x(0) \end{aligned} \quad \implies \quad \Phi(t)x(0) = \Phi(t-t_1)\Phi(t_1)x(0), \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Dall'arbitrarietà dello stato iniziale abbiamo

$$\Phi(t) = \Phi(t-t_1)\Phi(t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t$$

da cui segue la proprietà di semigruppato per la  $\Phi$ , ponendo

$$\tau_1 = t - t_1, \quad \tau_2 = t_1, \quad \text{oppure} \quad \tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t - t_1$$

Come conseguenza si ha che il prodotto tra due matrici di transizione dello stato è commutativo. La proprietà di semigruppato per la  $\Psi$  segue dalla sua definizione:

$$\begin{aligned} \Psi(\tau_1 + \tau_2) &= C\Phi(\tau_1 + \tau_2) = C\Phi(\tau_1)\Phi(\tau_2) = \Psi(\tau_1)\Phi(\tau_2) \\ &= C\Phi(\tau_2)\Phi(\tau_1) = \Psi(\tau_2)\Phi(\tau_1) \end{aligned}$$

### 2.1.1 Esempio: scarica di un condensatore

Cosideriamo un condensatore carico ad una tensione  $\bar{V}$ . Sia  $v(t)$  la tensione ai capi del condensatore.  $v$  è lo stato del sistema, che vive in  $X = \mathbb{R}$ , ed evolve a tempo continuo,  $T = \mathbb{R}$ . Non ci sono ingressi al sistema,  $U = \emptyset$ , e le uscite sono la tensione stessa,  $v \in Y = \mathbb{R}$ . Supponiamo che al tempo zero il condensatore inizi a scaricarsi e la sua tensione va a zero in modo asintotico, monotono decrescente. Supponiamo, inoltre, che il sistema sia stazionario e lineare. Volendo descrivere questa dinamica tramite la rappresentazione esplicita di un sistema a tempo continuo, vediamo se la seguente funzione scalare  $\Phi(t) : T \mapsto \mathbb{R}^{1 \times 1}$  può essere una matrice di transizione dello stato:

$$\Phi(t) = \frac{1}{t+1}$$

Controlliamo le proprietà di consistenza e semigruppato. Per la prima, abbiamo:

$$\Phi(0) = 1$$

dunque, a consistenza è verificata. Vediamo la proprietà di semigruppato:

$$\Phi(\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2 + 1} \neq \frac{1}{\tau_1 + 1} \cdot \frac{1}{\tau_2 + 1} = \Phi(\tau_1)\Phi(\tau_2)$$

Non è verificata, dunque, questa funzione non è adatta a descrivere il sistema, anche se è una funzione monotona decrescente asintoticamente a zero. Vediamo un'altra funzione candidata:

$$\Phi(t) = e^{-\frac{t}{\Delta}}$$

e verifichiamone le proprietà di consistenza e semigruppato:

$$\Phi(0) = e^0 = 1, \quad \Phi(\tau_1 + \tau_2) = e^{-\frac{\tau_1 + \tau_2}{\Delta}} = e^{-\frac{\tau_1}{\Delta}} \cdot e^{-\frac{\tau_2}{\Delta}} = \Phi(\tau_1)\Phi(\tau_2)$$

In questo caso le due proprietà sono valide, e la  $\Phi(t)$  è ben posta. Infine, poiché l'uscita coincide con lo stato del sistema, avremo, banalmente, che:

$$C = 1, \quad \implies \quad \Psi(t) = \Phi(t) = e^{-\frac{t}{\Delta}}$$

Riassumendo, la rappresentazione esplicita del sistema è la seguente:

$$v(t) = e^{-\frac{t}{\Delta}} \cdot \bar{V}$$

Nella sua semplicità questo modello può essere applicato a svariati contesti, dalla fisica alla biologia, tutti accomunati dal fatto che la velocità di eliminazione dello stato del sistema è lineare. Infatti, andando a calcolare la derivata dell'evoluzione esplicita:

$$\dot{v}(t) = -\frac{1}{\Delta} \cdot e^{-\frac{t}{\Delta}} \cdot \bar{V} = -\frac{1}{\Delta} \cdot v(t)$$

da cui segue la rappresentazione implicita:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\frac{1}{\Delta} \cdot v(t) \\ v(0) = \bar{V} \end{cases}$$

Per questi sistemi è facile calcolare il tempo di emivita (*half-life*),  $T_{1/2}$ , ossia il tempo di dimezzamento:

$$v(T_{1/2}) = \frac{\bar{V}}{2} = e^{-\frac{T_{1/2}}{\Delta}} \cdot \bar{V} \quad \implies \quad e^{-\frac{T_{1/2}}{\Delta}} = \frac{1}{2} \quad \implies \quad -\frac{T_{1/2}}{\Delta} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

Da cui segue

$$T_{1/2} = \Delta \ln(2) = \frac{\ln(2)}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{\Delta}$$

Poiché  $\ln(2) \simeq 0.7$ , possiamo interpretare il parametro  $\Delta$  come strettamente legato al tempo di emivita ( $T_{1/2} \simeq 70\% \Delta$ ).

## 2.2 Evoluzione libera: rappresentazioni implicite

Nel caso di sistemi lineari e stazionari, la funzione  $f(\cdot, \cdot)$  che descrive l'aggiornamento dello stato  $x(t+1)$  o la derivata  $\dot{x}(t)$  per i sistemi a tempo discreto e a tempo continuo, rispettivamente, è lineare rispetto a  $X \times U$ :

$$f(x(t), u(t)) = f(x(t), 0) + f(0, u(t))$$

Analizzando l'evoluzione libera, poniamo  $u(t) = 0$ . Dalla linearità rispetto a  $X$  della funzione  $f(x(t), 0)$ , segue che anche questa funzione può esprimersi come prodotto di un'opportuna matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  per lo stato  $x(t)$ , per cui una rappresentazione implicita per l'evoluzione libera di sistemi a tempo discreto e a tempo continuo è:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Vediamo di seguito che relazioni ci sono tra le matrici  $A$  e  $\Phi(t)$  nel tempo discreto e nel tempo continuo e, più in generale, come si passa da una rappresentazione esplicita (matrici  $\Phi$  e  $\Psi$ ) ad una implicita (matrici  $A$  e  $C$ ) e viceversa.

### 2.2.1 Passaggio esplicito-implicito (e viceversa) a tempo discreto

Consideriamo la rappresentazione esplicita di un sistema lineare stazionario a tempo discreto e cerchiamo un'equazione ricorsiva che possa descrivere le variazioni dello stato. Ponendo  $t_0 = t$  e cercando lo stato a  $t + 1$ :

$$x(t+1) = \Phi(t+1-t)x(t) = \Phi(1)x(t) = Ax(t)$$

dunque,  $A = \Phi(1)$ . Per quel che riguarda la matrice  $C$ , abbiamo già visto come, dalla proprietà di consistenza, segue che  $C = \Psi(0)$ . Dunque:

$$(\Phi(t), \Psi(t)) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = \Phi(1) \\ C = \Psi(0) \end{cases}$$

Per quel che riguarda il passaggio da implicita a esplicita, considerando l'equazione di transizione dello stato:

$$x(t) = Ax(t-1) = A(Ax(t-2)) = A^2x(t-2) = \dots = A^\tau x(t-\tau) = \dots = A^t x(t-t) = A^t x(0)$$

da cui segue che  $\Phi(t) = A^t$ . La relazione che ci permette di scrivere la matrice  $\Psi(t)$  in funzione della coppia  $(A, C)$  segue di conseguenza:

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = CA^t$$

Dunque:

$$(A, C) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Phi(t) = A^t \\ \Psi(t) = CA^t \end{cases}$$

### 2.2.2 Esempio: la sequenza di Fibonacci

La sequenza di Fibonacci è una sequenza di interi, che emerge in diversi contesti in natura. Spesso è associata a modelli di popolazione, quale il seguente. Consideriamo una specie di conigli tale per cui:

- i) una coppia neonata di conigli non è fertile nel primo mese di vita, e diventa fertile a partire dal secondo mese di vita;

- ii) a partire dal secondo mese di vita ogni coppia di conigli concepisce una nuova coppia di conigli;
- iii) la gestazione dura 1 mese
- iv) trascuriamo la morte dei conigli (ad esempio perché, consideriamo il numero cumulativo di conigli a partire da un dato istante, oppure perché la morte avviene oltre un certo numero di mesi, e noi siamo interessati a quanto accade prima)

Dunque, l'asse dei tempi è discreto,  $T = \{1, 2, \dots\}$  ed è scandito dal passare dei mesi. Sia  $f(t)$  il numero di coppie di conigli fertili al mese  $t$ ,  $n(t)$  il numero di coppie di conigli non-fertili al mese  $t$ , e  $N(t) = f(t) + n(t)$  il numero totale di coppie di conigli al tempo  $t$ . Cerchiamo di scrivere la dinamica con cui variano  $f(t)$  e  $n(t)$ . Al mese successivo, avremo che il numero di coppie fertili  $f(t+1)$  sarà pari al numero di coppie fertili del mese precedente  $f(t)$  + il numero di coppie non-fertili del mese precedente  $n(t)$ :

$$f(t+1) = f(t) + n(t)$$

Invece, il numero di coppie non-fertili del mese successivo  $n(t+1)$  sarà dato dal numero di coppie nate dalle coppie fertili del mese precedente:

$$n(t+1) = f(t)$$

Dunque, definendo come stato del sistema le coppie fertili e non-fertili

$$x(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

e come uscita del sistema il totale delle coppie di conigli  $y(t) = N(t) \in \mathbb{R}$ , avremo: ossia

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = [1 \quad 1]x(t) \end{cases}$$

Supponendo che al mese 1 esista una coppia di conigli neonata (quindi, non-fertile), la sequenza dei conigli totali (che restituisce la famosa sequenza di Fibonacci) si ricava a partire dallo stato iniziale:

$$(f(1) = 0, \quad n(1) = 1) \quad \implies \quad x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, al mese 2:

$$y(2) = Cx(2) = CAx(1) = [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [1 \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$y(3) = Cx(3) = CAx(2) = [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [1 \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$y(4) = Cx(4) = CAx(3) = [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [1 \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$y(5) = Cx(5) = CAx(4) = [1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = [1 \ 1] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

È facile verificare che, ad ogni istante:

$$y(t+1) = y(t) + y(t-1)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= Cx(t+1) = CAx(t) = [1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = [2 \ 1]x(t) = [2 \ 1] \begin{pmatrix} f(t) \\ n(t) \end{pmatrix} = 2f(t) + n(t) \\ &= (f(t) + n(t)) + f(t) = y(t) + (f(t-1) + n(t-1)) = y(t) + y(t-1) \end{aligned}$$

da cui è facile calcolare l'intera sequenza:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

### 2.2.3 Esempio: modello SIR di propagazione iniziale di un'epidemia

I modelli SIR prendono il nome dalle iniziali dei compartimenti S (*Susceptibles*), I (*Infected*) e R (*Recovered*, ossia guariti + deceduti) con cui si partiziona una popolazione relativamente alla posizione rispetto alla malattia. Dunque, assumendo l'asse dei tempi discreto (sono i giorni) e definendo

$$X(t) = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

il vettore di stato avremo il seguente modello dinamico che descrive la propagazione dell'epidemia:

$$\begin{cases} S(t+1) = S(t) - \beta \cdot \frac{S(t)I(t)}{N} \\ I(t+1) = I(t) + \beta \cdot \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \\ R(t+1) = R(t) + \gamma I(t) \end{cases}$$

I parametro  $\beta$  e  $\gamma$  rappresentano il tasso di infettività e il tasso di recupero, rispettivamente, mentre

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

è la popolazione totale, che si suppone invariante nel tempo (trascuriamo nascite e morti fuori dall'epidemia).

Così come è scritto, il modello implicito non è lineare. Tuttavia, è possibile ricavarne una versione lineare approssimata per lo sviluppo nei primi giorni della malattia. In questi casi, infatti, la quantità dei suscettibili varia di poco, relativamente alla popolazione totale, per cui

$$S(t) \simeq N$$

e, di conseguenza, le equazioni si modificano come segue:

$$\begin{cases} S(t+1) = S(t) - \beta I(t) \\ I(t+1) = I(t) + \beta I(t) - \gamma I(t) = (1 + \beta - \gamma)I(t) \\ R(t+1) = R(t) + \gamma I(t) \end{cases}$$

Si nota subito che l'equazione di aggiornamento degli infetti si può disaccoppiare dalle altre, per cui, ipotizzando una condizione iniziale data dal *paziente zero* unico infetto ad inizio epidemia, avremo

$$\begin{cases} I(t+1) = (1 + \beta - \gamma)I(t) \\ I(0) = 1 \end{cases}$$

da cui, la rappresentazione esplicita è

$$I(t) = (1 + \beta - \gamma)^t I(0) = (1 + \beta - \gamma)^t$$

Si noti come possono esserci due scenari:

- i)  $\beta - \gamma > 0$ , ossia, il tasso di infettività è maggiore di quello di recupero, In questi casi il numero di infetti cresce esponenzialmente, e l'epidemia esplose. Infatti:

$$I(t) = e^{t \ln(1 + \beta - \gamma)} = e^{\alpha t}, \quad \alpha = \ln(1 + \beta - \gamma) > 0$$

- ii)  $-1 < \beta - \gamma < 0$ , ossia, il tasso di infettività è minore di quello di recupero, In questi casi il numero di infetti decresce esponenzialmente, e l'epidemia implode a zero. Infatti:

$$I(t) = e^{t \ln(1 + \beta - \gamma)} = e^{\alpha t}, \quad \alpha = \ln(1 + \beta - \gamma) < 0$$

#### 2.2.4 Passaggio esplicito-implicito (e viceversa) a tempo continuo

Come operazione preliminare, è necessario investigare ulteriori proprietà della matrice di transizione  $\Phi$ , che valgono a tempo continuo. In particolare, calcoliamone la derivata:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta) - \Phi(t)}{\Delta}$$

Dalle proprietà di semigrupp e consistenza ( $\Phi(0) = I_n$ ):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)\Phi(\Delta) - \Phi(t)I_n}{\Delta} = \Phi(t) \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta) - \Phi(0)}{\Delta} = \Phi(t) \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0}$$

E, analogamente, poiché  $\Phi(t + \Delta) = \Phi(t)\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta)\Phi(t)$ , abbiamo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi(t) \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} \Phi(t)$$

Riassumendo, abbiamo visto come la derivata della matrice di transizione può scriversi come il prodotto per un'opportuna matrice, definita da  $\dot{\Phi}(0)$ :

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(0)\Phi(t) = \Phi(t)\dot{\Phi}(0)$$

Adesso consideriamo la rappresentazione esplicita di un sistema lineare stazionario a tempo continuo in evoluzione libera e cerchiamo un'equazione differenziale che possa descrivere le variazioni dello stato  $x(t) = \Phi(t)x(0)$ :

$$\dot{x}(t) = \frac{d\Phi}{dt} x(0) = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} \Phi(t)x(0) = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} x(t)$$

da cui segue che

$$A = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0}$$

Per quel che riguarda la matrice  $C$ , analogamente al caso a tempo discreto, abbiamo  $C = \Psi(0)$ .  
Dunque:

$$(\Phi(t), \Psi(t)) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = \dot{\Phi}(0) \\ C = \Psi(0) \end{cases}$$

Per il passaggio da implicito a esplicito, ossia per l'integrazione dell'equazione differenziale associata, sviluppiamo con la serie di Taylor la matrice  $\Phi(t)$  nell'intorno dell'origine  $t = 0$ :

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \dot{\Phi}(0)t + \ddot{\Phi}(0)\frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$$

Abbiamo già visto come

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$$

Questa relazione può generalizzarsi. Ad esempio:

$$\ddot{\Phi}(t) = \frac{d}{dt} \dot{\Phi}(t) = \frac{d}{dt} (A\Phi(t)) = A\dot{\Phi}(t) = A \cdot (A\Phi(t)) = A^2\Phi(t)$$

e, analogamente,

$$\Phi^{(k)}(t) = A^k\Phi(t) = \Phi(t)A^k$$

per cui, dallo sviluppo di Taylor, ricordando che  $\Phi(0) = I_n$ :

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k\Phi(0) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Si dimostra che la serie matriciale converge, e la matrice a cui converge prende il nome di **esponenziale di matrice**, per la somiglianza formale con lo sviluppo in serie dell'esponenziale scalare:

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Dunque, la matrice di transizione dello stato  $\Phi(t)$  si calcola attraverso l'esponenziale della matrice  $At$ . Analogamente al tempo discreto, la relazione che ci permette di scrivere la matrice  $\Psi(t)$  in funzione della coppia  $(A, C)$  segue di conseguenza:

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = CA^t$$

per cui

$$(A, C) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Phi(t) = e^{At} \\ \Psi(t) = Ce^{At} \end{cases}$$

### 2.2.5 Esempio: piccole oscillazioni libere di un giunto

Consideriamo un giunto omogeneo di lunghezza  $L$  e massa  $m$ , libero di ruotare senza attrito su di un piano verticale attorno a una delle sue estremità, e soggetto alla gravità  $g$ . Dall'equazione del secondo principio della dinamica di Newton, abbiamo che la somma dei momenti applicati al giunto (in questo esempio il solo momento provocato dalla forza di gravità) sono pari al momento d'inerzia del giunto  $I$  per la sua accelerazione angolare:

$$I\ddot{\theta}(t) = M$$

con  $\theta$  posizione angolare del giunto rispetto alla verticale, positiva se in senso anti-orario, e

$$M = -(mg) \cdot \left( \frac{L}{2} \sin(\theta) \right)$$

il momento prodotto dalla forza peso. L'equazione differenziale associata al sistema è:

$$I\ddot{\theta}(t) = -\frac{mgL}{2} \sin(\theta(t))$$

Lo stato è dato da posizione e velocità angolare,

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

per cui il sistema a tempo continuo ad esso associato è:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{mgL}{2I} \sin(x_1(t)) \end{cases}$$

La presenza di una funzione trascendente dello stato ( $\sin(\cdot)$ ) non rende lineare il sistema. Però, in regime di *piccole oscillazioni*, possiamo considerare l'approssimazione

$$\sin(\theta) \simeq \theta$$

per cui il sistema può risciversi in modo lineare come

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{2I} & 0 \end{bmatrix}, \quad y(t) = Cx(t), \quad C = [1 \ 0]$$

## 2.3 Risposta forzata per i sistemi a tempo discreto

Consideriamo la risposta forzata per i sistemi lineari a tempo discreto. Sfruttando la stazionarietà:

$$\varphi_{\text{for}}(t, t_0, u_{[t_0, t]}) = \varphi_{\text{for}}(t - t_0, 0, \delta_{-t_0} u_{[0, t-t_0]})$$

per cui è possibile descrivere la risposta forzata tramite la seguente ridefinizione della  $\varphi_{\text{for}}$ :

$$x_{\text{for}}(t) = \varphi_{\text{for}}(t, u|_{[0, t]}), \quad \varphi_{\text{for}} : T \times \mathcal{U} \mapsto X$$

In questo caso la linearità è rispetto alla funzione di ingresso, ossia rispetto ai suoi valori

$$u(0), u(1), \dots, u(t-1) \in U \subseteq \mathbb{R}^p$$

per cui

$$\begin{aligned} x_{\text{for}}(t) &= \varphi(t, u(0), u(1), \dots, u(t-1)) \\ &= H(t, 0)u(0) + H(t, 1)u(1) + \dots + H(t, t-1)u(t-1) = \sum_{\tau=0}^{t-1} H(t, \tau)u(\tau) \end{aligned}$$

La proprietà di stazionarietà fa sì che le matrici  $H(t, \tau)$  dipendano dalla sola variazione  $t - \tau$ , per cui avremo

$$x_{\text{for}}(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)$$

con le matrici  $H(t) : T \mapsto \mathbb{R}^{n \times p}$ , dette **matrici di forzamento**. Per rendere consistente la formula anche per  $t = 0$  (in questo caso la risposta forzata è nulla), si definisce  $H(0) = \mathbf{0}_{n \times p}$ , con  $\mathbf{0}_{n \times p}$  la matrice nulla in  $\mathbb{R}^{n \times p}$ . Riassumendo, la risposta forzata dello stato per un sistema lineare stazionario a tempo discreto è:

$$x_{\text{for}}(t) = \sum_{\tau=0}^t H(t - \tau)u(\tau)$$

Relativamente alla trasformazione di uscita, dalla linearità, scriviamone la risposta forzata come

$$y_{\text{for}}(t) = \eta_1(t, x_{\text{for}}(t)) + \eta_2(t, u(t))$$

Dalla stazionarietà,

$$\eta_1(t, x_{\text{for}}(t)) = \eta_1(0, x_{\text{for}}(t)), \quad \eta_2(t, u(t)) = \eta_2(0, u(t))$$

per cui, per un'opportuna ridefinizione della componente dinamica  $\eta_1$  (già fatta nel paragrafo precedente) e della componente diretta  $\eta_2$ :

$$y_{\text{for}}(t) = \eta_1(x_{\text{for}}(t)) + \eta_2(u(t)), \quad \eta_1 : X \mapsto Y, \quad \eta_2 : U \mapsto Y$$

Sfruttando la linearità delle funzioni  $\eta_1$  ed  $\eta_2$  rispetto all'ingresso attuale  $x(t)$  e all'uscita  $u(t)$ , rispettivamente, possono scriversi con opportune matrici  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ , per cui:

$$y_{\text{for}}(t) = Cx_{\text{for}}(t) + Du(t)$$

In particolare, la matrice  $D$  prende il nome di **matrice del legame diretto** ingresso/uscita. Andando a sostituire la risposta forzata dello stato avremo:

$$y_{\text{for}}(t) = C \sum_{\tau=0}^t H(t - \tau)u(\tau) + Du(t) = \sum_{\tau=0}^t CH(t - \tau)u(\tau) + Du(t) = \sum_{\tau=0}^t W(t - \tau)u(\tau)$$

La matrice  $W(t) : T \mapsto \mathbb{R}^{q \times p}$  è detta **matrice (funzione) di trasferimento**, ed è definita come

$$W(t) = \begin{cases} CH(t), & t > 0 \\ D, & t = 0 \end{cases}$$

Si noti che, utilizzando la funzione **delta di Kronecker**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

la matrice di trasferimento può scriversi in modo compatto come

$$W(t) = CH(t) + D\delta(t)$$

**Proposizione 2.2** - Le matrici  $H(\cdot)$  e  $W(\cdot)$  godono delle seguenti proprietà

$$H(\tau_1 + \tau_2) = \Phi(\tau_1)H(\tau_2), \quad \forall \tau_1, \tau_2 > 0$$

$$W(\tau_1 + \tau_2) = \Psi(\tau_1)H(\tau_2), \quad \forall \tau_1, \tau_2 > 0$$

**Dimostrazione** - Dalla proprietà di separazione di un sistema, dati  $0 \leq t_1 \leq t$ ,  $\forall u \in \mathcal{U}$ , posto  $x(t_0) = 0$ , avremo:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\tau=0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) = \Phi(t-t_1)x(t_1) + \sum_{\tau=t_1}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \\ &= \Phi(t-t_1) \sum_{\tau=0}^{t_1-1} H(t_1-\tau)u(\tau) + \sum_{\tau=t_1}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \end{aligned}$$

Da cui, semplificando:

$$\sum_{\tau=0}^{t_1-1} H(t-\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=0}^{t_1-1} \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau)u(\tau)$$

Dall'arbitrarietà dell'input  $u \in \mathcal{U}$  abbiamo

$$H(t-\tau) = \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau), \quad \forall 0 \leq \tau < t_1 < t$$

da cui segue la proprietà ponendo

$$\tau_1 = t - t_1 > 0, \quad \tau_2 = t_1 > 0$$

Per quel che riguarda la funzione di trasferimento,  $\forall \tau_1, \tau_2 > 0$ :

$$W(\tau_1 + \tau_2) = CH(\tau_1 + \tau_2) + D\delta(\tau_1 + \tau_2) = C\Phi(\tau_1)H(\tau_2) = \Psi(\tau_1)H(\tau_2)$$

### 2.3.1 Passaggio esplicito-implicito (e viceversa)

Consideriamo la rappresentazione esplicita di un sistema lineare stazionario a tempo discreto e cerchiamo un'equazione ricorsiva che possa descrivere le variazioni dello stato. Ponendo  $t_0 = t$  e cercando lo stato a  $t + 1$ :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \Phi(t+1-t)x(t) + \sum_{\tau=t}^{t+1} H(t+1-\tau)u(\tau) \\ &= \Phi(1)x(t) + H(1)u(t) + H(0)u(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

con  $B = H(1)$ , ricordando che  $H(0) = \mathbf{0}_{n \times p}$  e  $A = \Phi(1)$ . La matrice  $D$  segue banalmente dalla definizione della matrice di trasferimento,  $D = W(0)$ , per cui:

$$(H(t), W(t)) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B = H(1) \\ D = W(0) \end{cases}$$

Per quel che riguarda il passaggio da implicita a esplicita, dalle proprietà della matrice di forzamento:

$$H(t) = H(t-1+1) = \Phi(t-1)H(1) = A^{t-1}B$$

per cui  $H(t) = A^{t-1}B$ , per  $t > 0$  altrimenti,  $H(0) = \mathbf{0}_{n \times p}$ . Dalla definizione di  $W(t)$  segue, banalmente, che

$$W(t) = \begin{cases} CH(t) = CA^{t-1}B, & t > 0 \\ D, & t = 0 \end{cases}$$

per cui:

$$(A, B, C, D) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} H(t) = A^{t-1}B \\ W(t) = CA^{t-1}B + \delta(t)D \end{cases}$$

Riassumendo, dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto, le trasformazioni da una rappresentazione implicita

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ad una rappresentazione esplicita

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x(0) + \sum_{\tau=0}^t H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) = \Psi(t)x(0) + \sum_{\tau=0}^t W(t-\tau)u(\tau) \end{cases}$$

sono:

$$\Phi(t) = A^t, \quad H(t) = \begin{cases} A^{t-1}B, & t > 0 \\ \mathbf{0}_{n \times p}, & t = 0 \end{cases} \quad \Psi(t) = CA^t, \quad W(t) = CA^{t-1}B + \delta(t)D$$

e, viceversa:

$$A = \Phi(1), \quad B = H(1), \quad C = \Psi(0), \quad D = W(0)$$

### 2.3.2 Esempio: modello SIR di propagazione iniziale di un'epidemia, calcolo dei suscettibili

Riprendiamo l'equazione dei suscettibili dal modello approssimato lineare di cui abbiamo calcolato l'evoluzione degli infetti

$$\begin{cases} S(t+1) = S(t) - \beta I(t), \\ S(0) = N \end{cases} \quad I(t) = (1 + \beta - \gamma)^t$$

Quindi, gli infetti possono essere visti come l'ingresso al compartimento dei suscettibili, per cui:

$$S(t) = \Phi(t)N + \sum_{\tau=0}^t H(t-\tau)I(\tau)$$

con

$$\Phi(t) = A^t = 1^t = 1, \quad \begin{cases} H(t) = A^{t-1}B = 1^{t-1} \cdot (-\beta) = -\beta, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Quindi, per  $t > 0$ :

$$S(t) = N - \beta \sum_{\tau=0}^{t-1} (1 + \beta - \gamma)^\tau$$

Riguardo alle somme parziali del tipo di cui sopra, vale la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^p q^k = \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}$$

per cui:

$$S(t) = N - \beta \cdot \frac{1 - (1 + \beta - \gamma)^t}{1 - (1 + \beta - \gamma)} = N - \beta \cdot \frac{(1 + \beta - \gamma)^t - 1}{\beta - \gamma}$$

Nello scenario in cui l'epidemia esplode ( $\beta > \gamma$ ), abbiamo che  $S(t) \mapsto -\infty$ . Questo comportamento non ragionevole (ovviamente!) è da imputarsi all'approssimazione  $S(t) \simeq N$ , che, chiaramente, non potrà più valere con il ridursi di  $S(t)$ , per cui tale formula vale per spiegare l'iniziale decrescere di  $S(t)$ . Al contrario, nello scenario in cui l'epidemia implode ( $-1 < \beta - \gamma < 0$ ), supponendo che i suscettibili non si allontanino troppo da  $N$ , avremo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} N - \beta \cdot \frac{(1 + \beta - \gamma)^t - 1}{\beta - \gamma} = N - \frac{\beta}{\gamma - \beta}$$

per cui

$$\frac{\beta}{\gamma - \beta}$$

rappresenta la quantità di rimossi alla fine dell'epidemia.

### 2.3.3 Esempio: dinamica di una popolazione studentesca

Si consideri la dinamica di una popolazione di studenti di un ciclo di studi della durata di tre anni. Il tempo è discreto, e scandisce le dinamiche di anno in anno. Lo stato è rappresentato dal numero di studenti iscritti al primo, secondo e terzo anno, e dai laureati. Per cui il vettore di stato è  $x(t) \in \mathbb{R}^4$ , con  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , numero di studenti iscritti dell' $i$ -esimo anno, per l'anno accademico  $t$ , e  $x_4(t)$  numero totale di laureati. Sia  $u(t)$  l'ingresso del sistema definito come il numero di nuovi iscritti al primo anno. Si supponga che

- $\alpha_1 \in (0, 1)$  sia la frazione di iscritti al primo anno che si iscriveranno al secondo (e  $1 - \alpha_1$  la frazione di quelli che abbandonano al primo anno);

- $\alpha_2 \in (0, 1)$  sia la frazione di iscritti al secondo anno che si iscriveranno al terzo (e  $1 - \alpha_2$  la frazione di quelli che abbandonano al secondo anno);
- $\alpha_3 \in (0, 1)$  la frazione di iscritti al terzo anno che abbandonano,  $\alpha_4 \in (0, 1)$  sia la frazione di iscritti al terzo anno che si laureano

Allora, le relazioni dinamiche sono:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1(t) - \alpha_1 x_1(t) - (1 - \alpha_1)x_1(t) + u(t) \\x_2(t+1) &= x_2(t) + \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t) - (1 - \alpha_2)x_2(t) \\x_3(t+1) &= x_3(t) + \alpha_2 x_2(t) - \alpha_3 x_3(t) - \alpha_4 x_3(t) \\x_4(t+1) &= x_4(t) + \alpha_4 x_3(t)\end{aligned}$$

ossia, dopo le ovvie semplificazioni:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= u(t) \\x_2(t+1) &= \alpha_1 x_1(t) \\x_3(t+1) &= \alpha_2 x_2(t) + (1 - \alpha_3 - \alpha_4)x_3(t) \\x_4(t+1) &= \alpha_4 x_3(t) + x_4(t)\end{aligned}$$

Supponendo di scegliere come output la popolazione studentesca totale  $y_1$  e la popolazione totale di laureati  $y_2$ , avremo  $y(t) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\y_2(t) &= x_4(t)\end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 - \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Ipotizzando lo stato iniziale nullo al tempo  $t = 0$  (ossia non si hanno iscritti al tempo iniziale), e supponendo un flusso di iscrizioni costante  $u(t) = \bar{u}$  negli anni, avremo:

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B \bar{u} = \sum_{k=0}^{t-1} A^k B \bar{u}$$

Infine, tenendo conto che

$$A^0 B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^1 B = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_3 - \alpha_4) \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4 \end{bmatrix}, \quad A^4B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_3 - \alpha_4)^2 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4(1 + (1 - \alpha_3 - \alpha_4)) \end{bmatrix} =$$

generalizzando:

$$\begin{aligned} A^k B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4 \sum_{i=0}^{k-3} (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4 \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2}}{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \\ \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} (1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2}) \end{bmatrix}, \quad k > 2 \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned} x(1) &= B\bar{u} = [\bar{u} \ 0 \ 0 \ 0]^T & x(2) &= (B + AB)\bar{u} = [1 \ \alpha_1 \ 0 \ 0]^T \bar{u} \\ y(1) &= Cx(1) = [\bar{u} \ 0]^T & y(2) &= Cx(2) = [1 + \alpha_1 \ 0]^T \bar{u} \\ x(3) &= (B + AB + A^2B)\bar{u} = [1 \ \alpha_1 \ \alpha_1\alpha_2 \ 0]^T \bar{u} \\ y(3) &= Cx(3) = [1 + \alpha_1 + \alpha_2 \ 0]^T \bar{u} \end{aligned}$$

e poi, per  $t > 3$ :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \bar{u} \\ x_2(t) &= \alpha_1 \bar{u} \\ x_3(t) &= \alpha_1\alpha_2 \sum_{k=2}^{t-1} (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2} \bar{u} = \alpha_1\alpha_2 \sum_{\rho=0}^{t-3} (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^\rho \bar{u} \\ &= \alpha_1\alpha_2 \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{t-2}}{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)} \bar{u} = \alpha_1\alpha_2 \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{t-2}}{\alpha_3 + \alpha_4} \bar{u} \\ x_4(t) &= \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \sum_{k=3}^{t-1} (1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{k-2}) \bar{u} \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \sum_{\rho=0}^{t-4} (1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{\rho+1}) \bar{u} \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \left( (t-3) - (1 - \alpha_3 - \alpha_4) \frac{1 - (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^{t-3}}{\alpha_3 + \alpha_4} \right) \bar{u} \end{aligned}$$

Per cui notiamo che, al variare del tempo (degli anni accademici), supponendo un flusso in ingresso costante, la numerosità degli iscritti al primo anno non varia ed è fissa a  $\bar{u}$  (infatti tanti ne entrano, tanti ne escono, o per il secondo anno o per abbandono), la numerosità degli iscritti al secondo anno

non varia ed è pari alla frazione  $\alpha_1$  del flusso in ingresso, la numerosità degli iscritti al terzo anno varia nel tempo e converge al valore

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 + \alpha_4} \bar{u}$$

e, infine, la numerosità dei laureati asintoticamente converge verso una crescita lineare del tipo:

$$x_4(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \left( (t-3) - \frac{1 - \alpha_3 - \alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} \right)$$

### 2.3.4 Esempio: dinamica di estinzione un debito

Sia  $D$  l'ammontare di un debito contratto al tempo  $t = 0$ . Sia  $r(t)$  la rata annuale, e sia  $\alpha$  l'interesse annuo sul debito. Se indichiamo con  $x(t)$  la somma da restituire all'anno  $t$  (il tempo evolve in modo discreto di anno in anno), l'equazione relativa all'ammontare del debito è:

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + \alpha x(t) - r(t) \\ x(0) = D \end{cases}$$

In questo caso il sistema è scalare (dimensione di stato  $n = 1$ ), con le matrici  $A = 1 + \alpha$ ,  $B = -1$ . Per cui, la soluzione esplicita è:

$$x(t) = (1 + \alpha)^t D - \sum_{\tau=0}^{t-1} (1 + \alpha)^{t-\tau-1} r(\tau)$$

Supponendo una rata di restituzione costante  $r(t) = \bar{r}$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 + \alpha)^t D - \sum_{k=0}^{t-1} (1 + \alpha)^k \bar{r} = (1 + \alpha)^t D - \frac{1 - (1 + \alpha)^t}{1 - (1 + \alpha)} \bar{r} \\ &= (1 + \alpha)^t D - \frac{(1 + \alpha)^t - 1}{\alpha} \bar{r} \end{aligned}$$

Se volessimo conoscere che rata usare per estinguere il debito dopo  $N$  anni, avremo:

$$(1 + \alpha)^N D = \frac{(1 + \alpha)^N - 1}{\alpha} \bar{r}$$

da cui

$$\bar{r} = \frac{\alpha(1 + \alpha)^N D}{(1 + \alpha)^N - 1} = \frac{\alpha}{1 - (1 + \alpha)^{-N}} D$$

Ad esempio, per un debito di  $400K$  euro, a un tasso di interesse annuo fisso di  $\alpha = 2\%$ , volendo estinguere il debito in 30 anni, avreste una rata annua di

$$\bar{r} = \frac{0.02}{1 - (1.02)^{-30}} \cdot 400 \cdot 10^3 \simeq 17860$$

da cui quasi 1500 euro al mese. Se, invece, il tasso di interesse fosse dell'1%, allora

$$\bar{r} = \frac{0.01}{1 - (1.01)^{-30}} \cdot 400 \cdot 10^3 \simeq 15500$$

ossia, quasi 1300 euro mensili.

## 2.4 Risposta forzata per i sistemi a tempo continuo

Adattando, a tempo continuo, la risposta forzata nel caso di sistemi lineari e stazionari, la  $\varphi_{\text{for}}$  può essere riscritta come sola funzione dell'istante  $t \in T$  e della funzione  $u|_{[0,t]}$

$$x_{\text{for}}(t) = \varphi_{\text{for}}(t, u|_{[0,t]}), \quad \varphi_{\text{for}} : T \times \mathcal{U} \mapsto X$$

In questo caso, la  $\varphi_{\text{for}}$  è una trasformazione lineare della funzione  $u \in \mathcal{U}$ . Una generica trasformazione lineare di questo tipo si scrive attraverso il seguente **integrale di convoluzione**

$$x_{\text{for}}(t) = \int_0^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

con le matrici  $H(t) : T \mapsto \mathbb{R}^{n \times p}$  che prendono il nome di **matrici di forzamento**. Si noti come, a differenza dei sistemi a tempo discreto, nei sistemi a tempo continuo non è necessario imporre  $H(0) = \mathbf{0}_{n \times p}$  per far tornare  $x_{\text{for}}(0) = 0$  (anzi, vedremo che  $H(0)$  è una matrice *importante!*).

Relativamente alla trasformazione di uscita, non c'è alcuna differenza tra il tempo discreto e il tempo continuo, per cui l'uscita potrà scriversi come

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

con  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$  opportune matrici che non dipendono dal tempo per la proprietà di stazionarietà. In particolare, la matrice  $D$  prende il nome di **matrice del legame diretto ingresso/uscita**.

Andando a sostituire nell'uscita la risposta forzata dello stato avremo:

$$y_{\text{for}}(t) = C \int_0^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau + Du(t) = \int_0^t CH(t - \tau)u(\tau)d\tau + Du(t)$$

Per scrivere la risposta forzata in uscita in forma compatta, definiamo la funzione **delta (impulso) di Dirac**, indicata con  $\delta(t)$ . Trattasi di una *distribuzione* (non saremo rigorosi nella definizione) tale per cui:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - \bar{t})dt = f(\bar{t})$$

per cui la risposta forzata  $y_{\text{for}}$  può scriversi in modo compatto come

$$y_{\text{for}}(t) = \int_0^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

con la **matrice (funzione) di trasferimento**  $W(t) : T \mapsto \mathbb{R}^{q \times p}$  data da

$$W(t) = CH(t) + D\delta(t)$$

Si noti come la matrice di trasferimento ha la stessa struttura nel tempo discreto e nel tempo continuo, anche se l'impulso  $\delta$  assume valori discreti (delta di Kronecker) o continui (delta di Dirac) a seconda dei casi.

**Proposizione 2.3** - Le matrici  $H(\cdot)$  e  $W(\cdot)$  godono delle stesse proprietà delle loro omologhe a tempo discreto, ossia:

$$\begin{aligned} H(\tau_1 + \tau_2) &= \Phi(\tau_1)H(\tau_2), & \forall \tau_1, \tau_2 \geq 0 \\ W(\tau_1 + \tau_2) &= \Psi(\tau_1)W(\tau_2), & \forall \tau_1, \tau_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La dimostrazione segue gli stessi passi del caso a tempo discreto.

### 2.4.1 Passaggio esplicito-implicito (e viceversa) a tempo continuo

Come operazione preliminare, è necessario investigare ulteriori proprietà della matrice  $H$ . In particolare, calcoliamone la derivata:

$$\frac{dH}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{H(t + \Delta) - H(t)}{\Delta}$$

Dalle proprietà della Proposizione 2.3:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{H(\Delta + t) - H(0 + t)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta)H(t) - \Phi(0)H(t)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta) - \Phi(0)}{\Delta} \cdot H(t) \\ &= \dot{\Phi}(0)H(t) = AH(t) \end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo visto come, analogamente alla matrice  $\Phi$ , la derivata della matrice  $H$  può scriversi come prodotto per la matrice  $A$ :

$$\dot{H}(t) = AH(t)$$

Adesso consideriamo la rappresentazione esplicita di un sistema lineare stazionario a tempo continuo in evoluzione forzata e cerchiamo un'equazione differenziale che possa descrivere le variazioni dello stato

$$x(t) = \int_0^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \right] = \int_0^t \frac{dH(t - \tau)}{dt} u(\tau)d\tau + H(0)u(t) \\ &= \int_0^t AH(t - \tau)u(\tau)d\tau + H(0)u(t) = Ax(t) + H(0)u(t) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$B = H(0)$$

La matrice  $D$  segue dalle definizioni della matrice di trasferimento e della delta di Dirac:

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (W(\tau) - CH(\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} D\delta(\tau)d\tau$$

Riassumendo:

$$(H(t), W(t)) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B = H(0) \\ D = \int_{-\infty}^{+\infty} (W(\tau) - CH(\tau))d\tau \end{cases}$$

Per quel che riguarda il passaggio da implicita a esplicita, dalle proprietà della matrice  $H$  e dalla definizione di  $W(t)$ , avremo:

$$H(t) = H(t + 0) = \Phi(t)H(0) = e^{At}B, \quad W(t) = CH(t) + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Riassumendo, dato un sistema lineare stazionario a tempo continuo, le trasformazioni da una rappresentazione implicita

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ad una rappresentazione esplicita

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) = \Psi(t)x(0) + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau) \end{cases}$$

sono:

$$\Phi(t) = e^{At}, \quad H(t) = e^{At}B \quad \Psi(t) = Ce^{At}, \quad W(t) = Ce^{At}B + \delta(t)D$$

e, viceversa:

$$A = \dot{\Phi}(0), \quad B = H(0), \quad C = \Psi(0), \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (W(\tau) - CH(\tau))d\tau$$

#### 2.4.2 Esempio: Circuito RLC in serie

Consideriamo una maglia elettrica con un generatore di tensione (di differenza di potenziale  $\phi(t)$ ), una resistore (di resistenza  $R$ ), un condensatore (di capacità  $C$ ) e un'induttore (di induttanza  $L$ ) in serie. Andando a scrivere il bilancio delle tensioni nella maglia, indicando con  $i(t)$  la corrente nella maglia, tenendo conto che la caduta di potenziale per la resistenza vale  $Ri(t)$ , per il condensatore vale

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)d\tau$$

e per l'induttanza vale

$$v_i(t) = L \frac{di}{dt}$$

avremo:

$$\phi(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)d\tau + L \frac{di}{dt}$$

Se definiamo il vettore di stato  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  con  $x_1(t) = v_c(t)$  e  $x_2(t) = i(t)$  e indichiamo con  $u(t) = \phi(t)$  l'ingresso del sistema, avremo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{C}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{aligned}$$

ossia, in forma matriciale:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

da cui, se prendiamo come uscite le tensioni ai capi di resistenza, condensatore e induttanza:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= Ri(t) = Rx_2(t) \\y_2(t) &= v_c(t) = x_1(t) \\y_3(t) &= v_i(t) = Ldi/dt = -x_1(t) - Rx_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

avremo

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad C = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 1 & 0 \\ -1 & -R \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 2.4.3 Esempio: Moto di un corpo in caduta libera

Consideriamo un corpo di massa  $m$  in caduta libera per effetto della gravità. La forza d'attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra può approssimarsi a una forza di intensità costante pari a  $mg$ , con  $g = 9.8\text{ms}^{-2}$  l'accelerazione di gravità. Ipotizziamo che il corpo sia anche soggetto ad attrito dinamico a causa dell'aria, ossia una forza  $F_a$  che si oppone al movimento con intensità proporzionale alla velocità del corpo:  $F_a = -\beta v(t)$ , dove  $v(t) = \dot{s}(t)$  indica la velocità, e  $s(t)$  indica la posizione sull'asse verticale ove si esplica il moto. Dalla equazione della dinamica di Newton, avremo:

$$mg - \beta\dot{s}(t) = m\ddot{s}(t)$$

Indicando con  $x_1 = s(t)$  e  $x_2(t) = \dot{s}$  il vettore di stato in  $\mathbb{R}^2$ , avremo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\beta}{m}x_2(t) + g\end{aligned}$$

ossia, indicando con  $u(t) = g$  l'accelerazione di gravità

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta/m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Supponiamo di essere interessati alla velocità di regime (di un paracadutista, ad esempio) a partire da una velocità nulla (e posizione nulla su una scala verticale dello spazio), per cui l'uscita del sistema sarà la seconda componente del vettore di stato:

$$x(0) = [0 \ 0]^T, \quad C = [0 \ 1], \quad D = 0$$

Per il calcolo dell'esponenziale di matrice, notiamo che

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta/m \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} -\beta/m \\ (\beta/m)^2 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad A^k B = \begin{bmatrix} (-\beta/m)^{k-1} \\ (-\beta/m)^k \end{bmatrix}$$

per cui, l'evoluzione dell'uscita (in evoluzione forzata) diventa:

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{k=0}^{+\infty} C A^k B \frac{(t-\tau)^k}{k!} u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \sum_{k=0}^{+\infty} \left( -\frac{\beta(t-\tau)}{m} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot g d\tau = g \int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{gm}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}(t-\tau)} \Big|_0^t = \frac{gm}{\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right)\end{aligned}$$

Quindi, per  $t \mapsto +\infty$  abbiamo che la risposta forzata converge al valore di regime della velocità pari a  $gm/\beta$ . La velocità con cui si raggiunge la velocità di regime (occhio al gioco di parole!) dipende dalla velocità con cui l'esponenziale decrescente va a zero, ossia dal rapporto  $\beta/m$ : maggiore è l'attrito (fluido molto viscoso) oppure minore è la massa (corpo leggero) e più velocemente si raggiunge la velocità di regime.

## 2.5 Modi naturali

I modi naturali sono uno strumento per analizzare a fondo l'evoluzione libera di un sistema lineare e stazionario. Nello specifico vedremo come l'evoluzione libera possa decomporre nella somma di  $n$  evoluzioni (che prendono il nome di modi naturali), dove  $n$  è la dimensione dello spazio di stato del sistema. Il loro studio si basa sulla decomposizione spettrale della matrice  $A$ , di seguito riportata.

### 2.5.1 Decomposizione spettrale (autovalori distinti)

Consideriamo la matrice dinamica  $A$  di un sistema lineare stazionario (non importa se a tempo discreto o continuo). Di  $A$  calcoliamo gli autovalori, ossia le radici del *polinomio caratteristico*:

$$d(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Questo polinomio ha grado  $n$  e, per il *teorema fondamentale dell'algebra*, ha  $n$  radici nel campo complesso, di cui quelle non reali saranno a coppie complesse coniugate. Supponiamo che siano tutte distinte e denotiamo con  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  lo *spettro* della matrice  $A$ , ossia l'insieme dei suoi autovalori:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Siano  $u_1, \dots, u_n$  gli *autovettori destri* di  $A$  associati a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ossia

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

**Proposizione 2.4** - Vale la seguente proprietà: se  $(\lambda_i, \lambda_j)$ ,  $\lambda_j = \lambda_i^*$  sono una coppia di autovalori complessi coniugati, e se  $u_i \in X$  è un autovettore associato a  $\lambda_i$ , allora il suo complesso coniugato  $u_j = u_i^*$  è un autovettore per  $\lambda_j$ .

**Proposizione 2.5** - Se gli autovalori di  $A$  sono tutti distinti, allora

- lo spazio degli autovettori (destri) associati ad ogni autovalore ha dimensione 1:

$$\dim(\mathcal{U}_i) = 1, \quad \mathcal{U}_i = \{u \in X : Au = \lambda_i u\}. \quad i = 1, \dots, n$$

- l'insieme  $\{u_1, \dots, u_n\}$  formato dagli autovettori (destri)  $u_i \in \mathcal{U}_i$  è una base per lo spazio di stato  $X$

Dalla Proposizione 2.5 segue che la matrice  $U = [u_1 \dots u_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  costituita dagli autovettori (destri) come colonne è invertibile. Denotiamo con  $v_i^T$  l' $i$ -esima riga di tale matrice:

$$V = U^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

Allora, per definizione di inversa, sarà:

$$VU = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} [u_1 \cdots u_n] = \begin{bmatrix} v_1^T u_1 & v_1^T u_2 & \cdots & v_1^T u_n \\ v_2^T u_1 & v_2^T u_2 & \cdots & v_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^T u_1 & v_n^T u_2 & \cdots & v_n^T u_n \end{bmatrix} = I_n \quad v_i^T u_j = \delta_{ij}$$

Supponiamo di raccogliere gli  $n$  autovalori in una matrice diagonale  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  in  $\mathbb{C}^{n \times n}$  per cui, dalla definizione di autovettore, vale la seguente identità:

$$AU = A[u_1 \cdots u_n] = [Au_1 \cdots Au_n] = [\lambda_1 u_1 \cdots \lambda_n u_n] = [u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = U\Lambda$$

Dunque otteniamo l'identità:

$$AU = U\Lambda \quad \implies \quad U^{-1}A = \Lambda U^{-1} \quad \implies \quad VA = \Lambda V$$

che, scritta per la  $i$ -esima riga fornisce la relazione degli autovettori sinistri  $v_i^T$  associati agli autovalori  $\lambda_i$ :

$$v_i^T A = \lambda_i v_i^T, \quad i = 1, \dots, n$$

Dalla relazione tra  $A$ ,  $U$  e  $V$  segue la **decomposizione spettrale** della matrice  $A$ :

$$A = U\Lambda V = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i^T$$

Dalla decomposizione spettrale di  $A$ , si scrive facilmente la decomposizione spettrale della potenza di matrice  $A^2$ :

$$A^2 = (U\Lambda V)^2 = U\Lambda V U\Lambda V = U\Lambda I_n \Lambda V = U\Lambda^2 V = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 u_i v_i^T$$

che si generalizza facilmente per la potenza generica  $A^k$ :

$$A^k = U\Lambda^k V = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u_i v_i^T$$

Analogamente, si ricava la decomposizione spettrale di matrice  $e^A$ :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{U\Lambda^k V}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^k}{k!} u_i v_i^T = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} \right) u_i v_i^T = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i} u_i v_i^T$$

Utilizzando la decomposizione spettrale, scriviamo lo stato iniziale decomposto negli autovettori destri, ossia:

$$x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$$

I coefficienti  $\alpha_j$  possono facilmente calcolarsi sfruttando la relazione di ortonormalità tra autovettori destri e sinistri  $v_i^T u_j = \delta_{ij}$ . Quindi:

$$v_i^T x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_i^T u_j = \alpha_i$$

Da cui, a tempo discreto:

$$x_{\text{lib}}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v_i^T x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i (v_i^T x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^t u_i$$

e a tempo continuo:

$$x_{\text{lib}}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i^T x_0 = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i (v_i^T x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$$

Ognuno degli  $n$  elementi della somma

$$\alpha_i \lambda_i^t u_i \quad \text{oppure} \quad \alpha_i e^{\lambda_i t} u_i$$

fornisce un **modo naturale** dell'evoluzione libera del sistema. Di ogni modo naturale distinguiamo la sua **legge oraria**

$$\alpha_i \lambda_i^t \quad \text{oppure} \quad \alpha_i e^{\lambda_i t}$$

che ne descrive l'andamento nel tempo. I singoli modi naturali possono essere stabili, asintoticamente stabili o instabili, a seconda che la loro evoluzione resti limitata, vada a zero oppure diverga all'infinito. Nel caso in cui tutti i modi naturali siano asintoticamente stabili, l'evoluzione libera convergerà a zero esponenzialmente. Di seguito valutiamo tale andamento qualitativo nei casi specifici.

### 2.5.2 Modi naturali reali

Nel caso di autovalori reali, il modo naturale evolve lungo la direzione dell'autovettore  $u_i$ . Riguardo alla sua legge oraria, possiamo individuare le seguenti possibilità:

- **Stabilità asintotica.** Il modo naturale è *asintoticamente stabile* se la sua legge oraria va a zero per  $t \mapsto +\infty$ . In questo caso, il modo parte da  $\alpha_i u_i$  per  $t = 0$ , e converge esponenzialmente a zero per  $t \mapsto +\infty$ . Nel dettaglio:
  - nel caso *a tempo discreto*, il modo naturale è asintoticamente stabile se l'autovalore ad esso associato è in modulo minore di 1,  $|\lambda_i| < 1$ . Per  $-1 < \lambda_i < 0$  la convergenza non è monotona ma con oscillazioni; per  $0 < \lambda_i < 1$  la convergenza è monotona, senza oscillazioni, per  $\lambda_i = 0$  il modo è nullo per ogni  $t \geq 0$ ;
  - nel caso *a tempo continuo*, il modo naturale è asintoticamente stabile se l'autovalore ad esso associato è minore di 0,  $\lambda_i < 0$ . Per  $\lambda_i < 0$ , per un modo asintoticamente stabile la convergenza a zero è sempre monotona, senza oscillazioni.
- **Stabilità semplice.** Il modo naturale è (*semplicemente*) *stabile* se la sua legge oraria non diverge (né va a zero) per  $t \mapsto +\infty$ . In questo caso, il modo resta limitato lungo la direzione dell'autovettore  $u_i$ , senza convergere a zero. Nel dettaglio:

- nel caso *a tempo discreto* il modo naturale è (semplicemente) stabile se l'autovalore ad esso associato è in modulo uguale a 1,  $|\lambda_i| = 1$ . Per  $\lambda_i = 1$ , non c'è movimento, e il modo resta fisso al valore  $\alpha_i$  lungo la direzione  $u_i$ ; per  $\lambda_i = -1$ , il modo oscilla su  $u_i$  tra i valori  $\alpha_i$  e  $-\alpha_i$ ;
- nel caso *a tempo continuo*, il modo naturale è (semplicemente) stabile se l'autovalore ad esso associato è uguale a 0,  $\lambda_i = 0$ . Per  $\lambda_i = 0$ , non c'è movimento, e il modo resta fisso al valore  $\alpha_i$  lungo la direzione  $u_i$ .
- **Instabilità.** Il modo naturale è *instabile* se la sua legge oraria diverge per  $t \mapsto +\infty$ . In questo caso, il modo parte da  $\alpha_i u_i$  per  $t = 0$ , e diverge a  $\infty$  per  $t \mapsto +\infty$ . Nel dettaglio:
  - nel caso *a tempo discreto*, il modo naturale è **instabile** se l'autovalore ad esso associato è in modulo maggiore di 1,  $|\lambda_i| > 1$ . Per  $\lambda_i < -1$  la divergenza non è monotona ma con oscillazioni; per  $\lambda_i > 1$  la divergenza è monotona a  $+\infty$ , senza oscillazioni;
  - nel caso *a tempo continuo*, il modo naturale è **instabile** se l'autovalore ad esso associato è maggiore di 0,  $\lambda_i > 0$ . Per  $\lambda_i > 0$  il modo instabile diverge sempre a  $+\infty$  senza oscillazioni.

### 2.5.3 Modi naturali complessi coniugati

Nel caso di autovalori complessi coniugati, saranno complessi e coniugati anche gli autovettori destri e sinistri ad essi associati, per cui saranno complessi e coniugati anche i modi naturali ad essi associati. Per questo motivo verranno analizzati a coppie (complesse coniugate). Per quel che riguarda la loro struttura, relativamente ai sistemi a tempo discreto, facciamo le seguenti posizioni:

$$\lambda_i^{1/2} = a_i e^{\pm j\omega_i}, \quad \alpha_i^{1/2} = \rho_i e^{\pm j\phi_i}, \quad u_i^{1/2} = u_{i,a} \pm j u_{i,b}$$

per cui

$$\begin{aligned} \alpha_i^1 (\lambda_i^1)^t u_i^1 + \alpha_i^2 (\lambda_i^2)^t u_i^2 &= \rho_i e^{j\phi_i} a_i^t e^{j\omega_i t} (u_{i,a} + j u_{i,b}) + \rho_i e^{-j\phi_i} a_i^t e^{-j\omega_i t} (u_{i,a} - j u_{i,b}) \\ &= \rho_i a_i^t \left[ (e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e^{-j(\omega_i t + \phi_i)}) u_{i,a} + j (e^{j(\omega_i t + \phi_i)} - e^{-j(\omega_i t + \phi_i)}) u_{i,b} \right] \\ &= 2\rho_i a_i^t \left[ \cos(\omega_i t + \phi_i) u_{i,a} - \sin(\omega_i t + \phi_i) u_{i,b} \right] \end{aligned}$$

Invece, per i sistemi a tempo continuo, poniamo

$$\lambda_i^{1/2} = a_i \pm j\omega_i, \quad \alpha_i^{1/2} = \rho_i e^{\pm j\phi_i}, \quad u_i^{1/2} = u_{i,a} \pm j u_{i,b}$$

per cui

$$\begin{aligned} \alpha_i^1 e^{\lambda_i^1 t} u_i^1 + \alpha_i^2 e^{\lambda_i^2 t} u_i^2 &= \rho_i e^{j\phi_i} e^{(a_i + j\omega_i)t} (u_{i,a} + j u_{i,b}) + \rho_i e^{-j\phi_i} e^{(a_i - j\omega_i)t} (u_{i,a} - j u_{i,b}) \\ &= \rho_i e^{a_i t} \left[ (e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e^{-j(\omega_i t + \phi_i)}) u_{i,a} + j (e^{j(\omega_i t + \phi_i)} - e^{-j(\omega_i t + \phi_i)}) u_{i,b} \right] \\ &= 2\rho_i e^{a_i t} \left[ \cos(\omega_i t + \phi_i) u_{i,a} - \sin(\omega_i t + \phi_i) u_{i,b} \right] \end{aligned}$$

In entrambi i casi si hanno oscillazioni di *pulsazione*  $\omega$  (questa  $\omega$  si riferisce alla fase degli autovalori nel caso di sistemi a tempo discreto, oppure alla parte immaginaria degli autovalori nel caso di sistemi a tempo continuo).

Dunque, riguardo alla stabilità abbiamo come segue.

- **Stabilità asintotica.** Il modo naturale converge a zero esponenzialmente per  $t \mapsto +\infty$ . Il modo parte dalla posizione

$$2\rho_i(\cos(\phi_i)u_{i,a} - \sin(\phi_i)u_{i,b})$$

per  $t = 0$  e resta confinato nel piano individuato dalle direzioni di  $u_{i,a}$  e  $u_{i,b}$  convergendo asintoticamente a zero con un movimento *pseudoperiodico* a spirale. Nel dettaglio:

- nel caso *a tempo discreto*, il modo naturale è asintoticamente stabile se il modulo degli autovalori ad esso associati è minore di 1,  $|\lambda_i^{1/2}| = a_i < 1$ .
  - nel caso *a tempo continuo*, il modo naturale è asintoticamente stabile se la parte reale degli autovalori ad essi associati è minore di 0,  $\text{Re}(\lambda_i^{1/2}) = a_i < 0$
- **Stabilità semplice.** Il modo naturale percorre la seguente orbita periodica ellittica nel piano individuato dalle direzioni di  $u_{i,a}$  e  $u_{i,b}$ :

$$2\rho_i \left[ \cos(\omega_i t + \phi_i)u_{i,a} - \sin(\omega_i t + \phi_i)u_{i,b} \right]$$

Le dimensioni dell'orbita dipendono dalle condizioni iniziali  $(\rho_i, \phi_i)$ . Nel dettaglio:

- nel caso *a tempo discreto*, il modo naturale è (semplicemente) stabile se il modulo degli autovalori ad essi associati è uguale a 1,  $|\lambda_i^{1/2}| = a_i = 1$ .
  - nel caso *a tempo continuo*, il modo naturale è (semplicemente) stabile se la parte reale degli autovalori ad essi associati è uguale a 0,  $\text{Re}[\lambda_i^{1/2}] = a_i = 0$ .
- **Instabilità.** Il modo naturale diverge a  $\infty$  esponenzialmente per  $t \mapsto +\infty$ . Il modo parte dalla posizione

$$2\rho_i(\cos(\phi_i)u_{i,a} - \sin(\phi_i)u_{i,b})$$

per  $t = 0$  e resta confinato nel piano individuato dalle direzioni di  $u_{i,a}$  e  $u_{i,b}$  divergendo a  $\infty$  con un movimento *pseudoperiodico* a spirale. Nel dettaglio:

- nel caso *a tempo discreto*, il modo naturale è instabile se il modulo degli autovalori ad esso associati è maggiore di 1,  $|\lambda_i^{1/2}| = a_i > 1$ .
- nel caso *a tempo continuo*, il modo naturale è instabile se la parte reale degli autovalori ad essi associati è maggiore di 0,  $\text{Re}[\lambda_i^{1/2}] = a_i > 0$

#### 2.5.4 Eccitabilità e osservabilità dei modi naturali

Le seguenti definizioni riguardano la possibilità che singoli modi naturali possano essere coinvolti nell'evoluzione libera, forzata o nella risposta in uscita. Cominciamo dalla possibilità di vedere un modo naturale nell'evoluzione libera dello stato.

**Definizione 2.6** - *Il modo  $i$ -esimo è eccitato dallo stato iniziale  $x(0)$  se è presente nell'evoluzione libera a partire da  $x(0)$ , ossia se*

$$\alpha_i = v_i^T x(0) \neq 0$$

Per quel che riguarda la risposta forzata, consideriamo un ingresso impulsivo del tipo

$$u(t) = e_j \delta(t)$$

dove  $e_j$  è il  $j$ -esimo vettore della base canonica in  $\mathbb{R}^p$  (tutto nullo tranne che in posizione  $j$  dove vale 1), e  $\delta(t)$  si riferisce alla delta di Kronecker o alla delta di Dirac a seconda che consideriamo il tempo discreto o il tempo continuo. Per cui avremo

$$x_{\text{for}}(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B e_j \delta(\tau) = A^{t-1} B_j, \quad x_{\text{for}}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B e_j \delta(\tau) d\tau = e^{At} B_j$$

per i sistemi a tempo discreto e a tempo continuo, rispettivamente, dove  $B_j = B e_j$  è la colonna  $j$ -esima di  $B$ . Da cui, sfruttando la decomposizione spettrale e i modi naturali:

$$x_{\text{for}}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-1} u_i v_i^T B_j, \quad x_{\text{for}}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i^T B_j$$

In entrambi i casi, il modo naturale associato all'autovalore  $i$ -esimo è presente per impulsi in ingresso se  $v_i^T B_j \neq 0$  per almeno un canale in ingresso, da cui segue la definizione:

**Definizione 2.7** - *Il modo  $i$ -esimo è eccitabile per impulsi in ingresso se*

$$v_i^T B \neq 0$$

Infine, consideriamo l'evoluzione libera in uscita e sfruttiamo la decomposizione spettrale e i modi naturali per i sistemi a tempo discreto e a tempo continuo:

$$y_{\text{lib}}(t) = C A^t x(0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t C u_i \alpha_i, \quad y_{\text{lib}}(t) = C e^{At} x(0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t C u_i \alpha_i$$

da cui segue la definizione di osservabilità in uscita per modi naturali che sono presenti in almeno un canale dell'uscita.

**Definizione 2.8** - *Un modo naturale è osservabile in uscita se*

$$C u_i \neq 0$$

ossia se la direzione del modo naturale non è nel nullo della matrice  $C$ . Se così non fosse, il contributo del modo naturale sarebbe nullo, qualunque fosse la scelta dello stato iniziale.

### 2.5.5 Il caso di autovalori multipli

Nel caso di autovalori  $\lambda_i$  con molteplicità algebrica  $m_i > 1$ , si dimostra che ad essi possono essere associati modi naturali con leggi orarie del tipo

- a tempo discreto:  $t^{k-1} \lambda_i^t$ ,  $k \leq m_i$
- a tempo continuo:  $t^{k-1} e^{\lambda_i t}$ ,  $k \leq m_i$

Da cui segue che, nel caso di autovalori multipli, la stabilità (semplice) non è garantita dall'avere  $|\lambda_i| = 1$  nel caso a tempo discreto, o  $\text{Re}[\lambda_i] = 0$  nel caso a tempo continuo; al contrario, la presenza dei modi di cui sopra con  $k > 1$  porta *instabilità*.

### 2.5.6 Esempio: Modi naturali nel circuito RLC in serie

Consideriamo il circuito RLC in serie, la cui matrice dinamica è stata vista essere:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}$$

Da cui il polinomio caratteristico è:

$$d(\lambda) = \lambda \left( \lambda + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC} = \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC}$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

Dunque, a seconda dei valori di resistenza, capacità e induttanza possiamo avere diverse situazioni:

- $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . In questo caso la resistenza è sufficientemente grande da impedire l'innescio di oscillazioni. Infatti, la disuguaglianza garantisce che i due autovalori siano reali ed entrambi negativi:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} < \lambda_2 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

I modi naturali sono entrambi aperiodici e asintoticamente stabili. Per determinarli, calcoliamone gli autovettori destri:

$$(A - \lambda_i I_2) u_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1/C \\ -1/L & -R/L - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

So già che le due equazioni sono dipendenti, per cui scelgo solo la prima:

$$\lambda_i u_{i1} = u_{i2}/C \quad \Rightarrow \quad u_{i2} = \lambda_i C u_{i1} \quad \Rightarrow \quad u_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i C \end{pmatrix}$$

Da cui

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 C & \lambda_2 C \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad V = U^{-1} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)C} \begin{bmatrix} \lambda_2 C & -1 \\ -\lambda_1 C & 1 \end{bmatrix}$$

e, quindi

$$v_1^T = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)C} (\lambda_2 C \quad -1), \quad v_2^T = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)C} (-\lambda_1 C \quad 1)$$

Supponiamo che lo stato iniziale abbia una tensione ai capi del condensatore  $x_1(0)$  e una corrente nell'induttore  $x_2(0)$  per cui le componenti lungo gli autovettori destri sono

$$\alpha_1 = v_1^T x(0) = \frac{\lambda_2 C x_1(0) - x_2(0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)C}, \quad \alpha_2 = v_2^T x(0) = \frac{-\lambda_1 C x_1(0) + x_2(0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)C}$$

e i due modi naturali sono:

$$e^{\lambda_1 t} \frac{\lambda_2 C x_1(0) - x_2(0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)C} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 C \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_2 t} \frac{-\lambda_1 C x_1(0) + x_2(0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)C} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 C \end{pmatrix}$$

- $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . In questo caso abbiamo due autovalori reali e coincidenti, entrambi negativi. I modi naturali sono entrambi aperiodici e asintoticamente stabili, con uno dei due che ha una legge oraria del tipo  $te^{\lambda t}$ ;
- $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . In questo caso la resistenza non è sufficientemente grande da impedire l'innescio di oscillazioni. I due autovalori sono complessi coniugati, con parte reale negativa:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{j}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{j}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$$

Si noti che, per  $R = 0$ , si avrebbe che la parte reale degli autovalori sarebbe nulla, per cui la stabilità non è più asintotica e la traiettoria dei modi naturali complessi coniugati sarebbe un'ellisse.

## 2.6 Discretizzazione di un sistema a tempo continuo

Consideriamo un sistema a tempo continuo e immaginiamo di campionare stato, ingresso e uscita a intervalli regolari di ampiezza  $\Delta$  per cui la sequenza discreta degli istanti campionati sarà:

$$t_k = k\Delta, \quad k \in \mathbb{N}$$

Volendo scrivere la funzione di transizione dello stato a tempo discreto associata all'aggiornamento dei campioni da  $t_k$  a  $t_{k+1}$ , avremo:

$$x(t_{k+1}) = x((k+1)\Delta) = e^{A((k+1)\Delta - k\Delta)}x(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{A((k+1)\Delta - \tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Se approssimiamo

$$u(\tau) \simeq u(k\Delta), \quad \tau \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$$

allora

$$x((k+1)\Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) + \int_0^\Delta e^{A\theta}d\theta \cdot Bu(k\Delta)$$

Da cui

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k)$$

con  $x_d(k) = x(k\Delta)$ ,  $u_d(k) = u(k\Delta)$  e

$$A_d = e^{A\Delta}, \quad B_d = \int_0^\Delta e^{A\theta}d\theta \cdot B$$

Nel caso in cui la matrice  $A$  fosse invertibile, per calcolare l'integrale della matrice  $B_d$  sfruttiamo l'espansione di matrice:

$$\begin{aligned} \int_0^\Delta e^{A\theta}d\theta &= \int_0^\Delta \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \frac{\theta^k}{k!} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \int_0^\Delta \frac{\theta^k}{k!} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \frac{\theta^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{h=1}^{+\infty} A^{h-1} \frac{\Delta^h}{h!} \\ &= A^{-1} \sum_{h=1}^{+\infty} A^h \frac{\Delta^h}{h!} = A^{-1} \left( -I_n + \sum_{h=0}^{+\infty} A^h \frac{\Delta^h}{h!} \right) = A^{-1} (e^{A\Delta} - I_n) \end{aligned}$$

Per cui, in tal caso:

$$A_d = e^{A\Delta}, \quad B_d = A^{-1}(A_d - I_n)B$$

E' bene sottolineare che, se il sistema a tempo continuo fosse sollecitato da un segnale in ingresso costante a tratti per cui

$$u(\tau) = u(k\Delta), \quad \tau \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$$

allora la discretizzazione sarebbe *esatta*, ossia lo stato del sistema a tempo discreto restituirebbe lo stato del sistema a tempo continuo negli istanti campionati.

Nel caso di un sistema discretizzato, dalla decomposizione spettrale segue che gli autovalori coincidono con l'esponenziale degli autovalori del sistema a tempo continuo di partenza:

$$\sigma_{\text{tempo continuo}} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \implies \sigma_{\text{discretizzato}} = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\}$$

Da cui segue che, se il sistema a tempo continuo di partenza è stabile/stabile asintoticamente/instabile, altrettanto sarà il sistema discretizzato.

## 2.7 Transitorio e regime

Una decomposizione delle evoluzioni, alternativa a quella descritta dalle risposte in evoluzione libera e forzata, può avere luogo se esiste la **risposta a regime permanente**. Facendo riferimento all'uscita, la risposta a regime permanente per un dato ingresso  $u$  esiste ed è definita come:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y(t)$$

quando tale limite esiste ed è unico, per ogni stato iniziale  $x_0$ . Dalla rappresentazione esplicita per i sistemi a tempo continuo

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

e a tempo discreto

$$y(t) = CA^{t-t_0}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^t CA^{t-\tau}Bu(\tau) + Du(t)$$

segue che la risposta a regime permanente esiste quando

- 1) l'evoluzione libera in uscita va a zero per  $t_0 \mapsto -\infty$ , per ogni  $x_0$ :

$$\lim_{t_0 \mapsto -\infty} Ce^{A(t-t_0)}x_0 = 0, \quad \lim_{t_0 \mapsto -\infty} CA^{t-t_0}x_0 = 0$$

- 2) l'integrale (a tempo continuo) o la serie (a tempo discreto)

$$\int_{-\infty}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad \sum_{\tau=-\infty}^t CA^{t-\tau-1}Bu(\tau)$$

esistono per l'ingresso  $u$

Una condizione sufficiente perché il primo limite esista è che il sistema sia asintoticamente stabile, ossia tutti i modi naturali siano asintoticamente stabili. Infatti, a tempo continuo:

$$C e^{A(t-t_0)} x_0 = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-t_0)} \alpha_i C u_i, \quad \alpha_i = v_i^T x_0$$

o a tempo discreto

$$C A^{t-t_0} x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{t-t_0} \alpha_i C u_i, \quad \alpha_i = v_i^T x_0$$

per cui ogni singolo modo naturale va a zero per  $t_0 \mapsto -\infty$  solo  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$  (a tempo continuo) o  $|\lambda_i| < 1$  (a tempo discreto). Tale condizione non è necessaria. Infatti, se esiste un modo instabile che non è osservabile in uscita, esso non dà contributo nell'evoluzione libera dell'uscita qualunque sia lo stato iniziale. Per cui una condizione necessaria e sufficiente perché il primo limite vada a zero per ogni stato iniziale è che i modi naturali non asintoticamente stabili non siano osservabili in uscita.

Come ultimo commento si noti come l'esistenza di modi semplicemente stabili (osservabili in uscita) impedisce l'esistenza della risposta a regime permanente perché, pur consentendo l'esistenza del limite (diverso da zero), lo renderebbe dipendente dallo stato iniziale.

Per quel che riguarda l'esistenza dell'integrale (a tempo continuo) o della serie (a tempo discreto), dipende anche dal tipo di ingresso considerato, per cui si deve valutare caso per caso.

Sotto queste ipotesi, la risposta del sistema può decomporre nella sua risposta a regime  $y_{\text{reg}}(t)$  e nel suo **transitorio**, definito come differenza:

$$y_{\text{tra}}(t) = y(t) - y_{\text{reg}}(t)$$

Analogamente può decomporre l'evoluzione dello stato nella sue componenti di regime e di transitorio. In questo caso l'asintotica stabilità è una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del primo limite, perché anche i modi non osservabili in uscita contano.

Si noti come, nel caso in cui esiste la risposta a regime permanente, vale il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - y_{\text{reg}}(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_{\text{for}}(t) - y_{\text{reg}}(t)\| = 0$$

ossia, la risposta a regime permanente può approssimarsi con la risposta forzata del sistema, supponendosi esaurito il transitorio.

Di seguito vediamo alcune risposte a regime particolarmente importanti per i sistemi a tempo continuo; per quel che riguarda i sistemi a tempo discreto, *mutatis mutandis*, valgono gli stessi risultati finali. Senza perdita di generalità, andremo a valutare sistemi con ingressi e uscite scalari, per semplicità. L'ipotesi di fondo è che esista la risposta a regime permanente. Per semplicità di scrittura, supporremo  $D = 0$ .

### 2.7.1 Risposta a regime all'impulso

Considereremo un impulso centrato in  $t_0$ , per cui supporremo che anche l'impulso sia applicato in un tempo infinitamente antecedente:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \delta(\tau-t_0) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} W(t-t_0) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} W(\theta)$$

Andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice, poiché sappiamo che il sistema è stabile asintoticamente (e, quindi, gli autovalori sono a parte reale negativa):

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i \theta} C u_i v_i^T B = 0$$

per cui tutti gli  $n$  modi della risposta a regime andranno a zero asintoticamente. Dunque, la risposta a regime permanente all'impulso è identicamente nulla.

### 2.7.2 Risposta a regime al gradino

Considereremo un gradino che ha inizio in  $t_0$ , per cui supporremo che anche l'inizio dell'applicazione del gradino vada a  $-\infty$ . Per cui:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \delta_{-1}(\tau - t_0) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta$$

Andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice avremo:

$$y_{\text{reg}}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} d\theta \right) C u_i v_i^T B = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\lambda_i} C u_i v_i^T B$$

poiché sappiamo che il sistema è stabile asintoticamente. Dunque, la risposta a regime permanente al gradino è una costante.

### 2.7.3 Risposta a regime a una rampa lineare

La rampa lineare è  $u(t) = t$ , per cui

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \tau d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) (t-\theta) d\theta$$

Andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice:

$$y_{\text{reg}}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} (t-\theta) d\theta \right) C u_i v_i^T B$$

Risolviamo l'integrale per parti:

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} (t-\theta) d\theta = \frac{1}{\lambda_i} e^{\lambda_i \theta} (t-\theta) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} e^{\lambda_i \theta} d\theta = -\frac{t}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i^2} e^{\lambda_i \theta} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{t}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i^2}$$

I limiti si semplificano per  $t \mapsto +\infty$  grazie alla stabilità asintotica dei modi naturali. Dunque, la risposta a regime permanente di una rampa lineare è una rampa. Questo risultato può generalizzarsi a ingressi che siano rampe quadratiche ( $u(t) = t^2$ ), cubiche ( $u(t) = t^3$ ) o polinomiali in genere ( $u(t) = t^k$ ). In tutti questi casi, si dimostra che la risposta a regime mima il segnale polinomiale in ingresso.

### 2.7.4 Risposta a regime a un'esponenziale

Consideriamo un segnale esponenziale del tipo  $u(t) = e^{at}$ , per cui:

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) e^{a\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) e^{a(t-\theta)} d\theta$$

Andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice:

$$y_{\text{reg}}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} e^{a(t-\theta)} d\theta \right) C u_i v_i^T B$$

Da cui l'integrale diventa:

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} e^{a(t-\theta)} d\theta = e^{at} \int_0^{+\infty} e^{(\lambda_i - a)\theta} d\theta = \frac{e^{at}}{\lambda_i - a} \lim_{M \rightarrow +\infty} (e^{(\lambda_i - a)M} - 1)$$

Quindi, tali limiti esistono per

$$a > \max_{i=1, \dots, n} \{\text{Re}[\lambda_i]\}$$

e la risposta a regime permanente vale

$$y_{\text{reg}}(t) = e^{at} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a - \lambda_i} C u_i v_i^T B$$

Dunque, se l'ingresso è un'esponenziale, avremo che la risposta a regime è un'esponenziale dello stesso tipo di quella in ingresso, supposto che la costante dell'esponenziale consenta l'esistenza del limite.

### 2.7.5 Risposta armonica

La risposta armonica consiste nella risposta a regime permanente per un segnale di ingresso armonico, ossia un seno o un coseno di pulsazione  $\omega$ . Nel caso del coseno, possiamo sfruttare la scomposizione con esponenziali complesse:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

così che si possa applicare la risposta a regime permanente per ingressi esponenziali, che esiste sempre, in questo caso, dato che la costante dell'esponenziale ha parte reale nulla, certamente maggiore della parte reale più grande degli autovalori (asintoticamente stabili). Dunque, se

$$e^{j\omega t} \mapsto y_{\text{reg}}(t) = e^{j\omega t} \cdot R_+, \quad R_+ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{j\omega - \lambda_i} C u_i v_i^T B$$

allora

$$e^{-j\omega t} \mapsto y_{\text{reg}}(t) = e^{-j\omega t} \cdot R_-, \quad R_- = \sum_{i=1}^n \frac{1}{-j\omega - \lambda_i} C u_i v_i^T B$$

con  $R_-$ , per costruzione, uguale al complesso coniugato di  $R_+$ . Per cui denotando

$$R_+ = \rho e^{j\theta}, \quad R_- = \rho e^{-j\theta}$$

avremo che la risposta armonica al coseno è data da:

$$\frac{e^{j\omega t} \rho e^{j\theta} + e^{-j\omega t} \rho e^{-j\theta}}{2} = \rho \frac{e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}}{2} = \rho \cos(\omega t + \theta)$$

E, analogamente, la risposta armonica all'ingresso  $u(t) = \sin(\omega t)$  sarà:

$$\rho \sin(\omega t + \theta)$$

Dunque, esaurito il transitorio, un sistema lineare eccitato da un armonica di pulsazione  $\omega$  avrà, a regime, un armonica della stessa pulsazione, amplificata (o attenuata) e sfasata.

### 3 Sistemi lineari stazionari a tempo continuo: approccio in frequenza

#### 3.1 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è lo strumento utilizzato per l'analisi dei sistemi lineari e stazionari a tempo continuo nel dominio delle frequenze. Essa è una trasformazione integrale che associa ad una funzione  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$  la seguente funzione complessa ad argomento complesso  $F: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^n$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Esistono condizioni sufficienti affinché una data funzione ammetta trasformata di Laplace, ossia affinché esista un dominio  $D \subseteq \mathbb{C}$  non vuoto all'interno del quale l'integrale di Laplace esista. Senza entrare nei dettagli tecnici, una delle condizioni sufficienti affinché la funzione  $f(t)$  ammetta trasformata di Laplace è che sia di *ordine esponenziale*, ossia

$$\exists M > 0, \exists \gamma \in \mathbb{R} : \|f(t)\| \leq M e^{\gamma t}$$

In questi casi la trasformata di Laplace esiste  $\forall s \in \mathbb{C}$  tale che  $\text{Re}[s] > \gamma$ . Sono chiaramente funzioni di ordine esponenziale le funzioni costanti, i polinomi, le esponenziali, le armoniche e i prodotti di tali funzioni.

La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà:

- *linearità:*

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

- *traslazione nel tempo:*

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s), \quad \tau \geq 0, \quad f(t) = 0, \text{ per } t < 0;$$

- *traslazione in frequenza:*

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a), \quad a \in \mathbb{R};$$

- *derivata:*

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^+);$$

- *integrale:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s};$$

- *convoluzione:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s);$$

- *limiti notevoli (nel caso in cui i limiti sotto indicati esistano):*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

### 3.2 Trasformate di segnali

Di seguito sono riportate le trasformate dei segnali di ingresso maggiormente utilizzati:

- *impulso matematico:*

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1;$$

- *gradino:*

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s};$$

- *rampa lineare:*

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2};$$

- *ingresso canonico di ordine k:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{s^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N};$$

- *esponenziale:*

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad a \in \mathbb{R};$$

- *seno:*

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

- *coseno:*

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R};$$

- *ingresso canonico di ordine k modulato da un'esponenziale:*

$$\mathcal{L}\left[e^{at} \frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{(s-a)^{k+1}}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N};$$

- *seno modulato da un'esponenziale:*

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}, \quad a, \omega \in \mathbb{R};$$

- *coseno modulato da un'esponenziale:*

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos(\omega t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}, \quad a, \omega \in \mathbb{R}.$$

### 3.3 Risposta in frequenza di un sistema lineare stazionario a tempo continuo

Utilizzando le proprietà della trasformata di Laplace, è facile verificare che, nel dominio complesso, le equazioni implicite del sistema diventano le seguenti equazioni algebriche:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI_n - A)^{-1}x(t_0) + (sI_n - A)^{-1}BU(s), \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s), \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} X_{\text{lib}}(s) &= (sI_n - A)^{-1}x(t_0), & X_{\text{for}}(s) &= (sI_n - A)^{-1}BU(s), \\ Y_{\text{lib}}(s) &= C(sI_n - A)^{-1}x(t_0), & Y_{\text{for}}(s) &= C(sI_n - A)^{-1}BU(s) + DU(s), \end{aligned}$$

e la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento risulta, dunque:

$$W(s) = \mathcal{L}[W(t)] = C(sI_n - A)^{-1}B + D.$$

Da quanto scritto segue che la trasformata di Laplace dell'esponenziale di matrice è:

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI_n - A)^{-1}$$

ossia una funzione del tipo

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{K_{n-1}s^{n-1} + \dots + K_1s + K_0}{(s - \lambda_1) \dots (s - \lambda_n)}, \quad K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

con i **poli** dati dagli autovalori  $\lambda_i$ , ognuno contato con la sua molteplicità. Nel caso di tutti autovalori distinti, tale funzione può scriversi decomposta in *fratti semplici*

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{R_n}{s - \lambda_n}, \quad R_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

con i coefficienti matriciali  $R_i$  (nel caso di autovalori complessi coniugati, anch'essi diventano complessi coniugati) che prendono il nome di **residui** che si calcolano come

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i)(sI_n - A)^{-1}$$

Nel caso di *fratti multipli* del tipo

$$(sI_n - A)^{-1} = \dots + \frac{R_i^1}{(s - \lambda_i)} + \frac{R_i^2}{(s - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{R_i^{n_i}}{(s - \lambda_i)^{n_i}} + \dots$$

i residui  $R_i^j$  si calcolano come

$$R_i^{n_i} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i)^{n_i} (sI_n - A)^{-1}, \quad R_i^{n_i-1} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d}{ds} [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI_n - A)^{-1}]$$

fino a

$$R_i^1 = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(n_i - 1)!} \frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}} [(s - \lambda_i)^{n_i} (sI_n - A)^{-1}]$$

Tenendo conto che  $(sI_n - A)^{-1}$  è la trasformata di Laplace dell'esponenziale di matrice, nel caso di autovalori distinti, antitraformando lo sviluppo in fratti semplici avremo

$$x_{\text{lib}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_{\text{lib}}(s)] = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} R_i x(t_0)$$

da cui segue che

$$R_i = u_i v_i^T$$

Andando a considerare la trasformata di Laplace della risposta forzata dell'uscita, sfruttando la trasformata di Laplace di un prodotto di convoluzione:

$$\begin{aligned} Y_{\text{for}}(s) &= \mathcal{L}[y_{\text{for}}(t)] = \mathcal{L}\left[\int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)\right] \\ &= (C(sI_n - A)^{-1} B + D) U(s) = W(s) U(s) \end{aligned}$$

Osserviamo che:

- considerando come input in ingresso quelli descritti nel paragrafo precedente, la risposta forzata di un sistema, nel dominio di Laplace, è un rapporto proprio di polinomi (ossia il grado del numeratore minore o uguale al grado del denominatore). L'uguaglianza si ottiene solo per un ingresso impulsivo (che restituisce la funzione di trasferimento) e solo se nel sistema c'è la matrice del legame diretto  $D$  diversa da 0;
- considerando autovalori tutti distinti, dalla decomposizione in fratti semplici dell'esponenziale di matrice nel dominio di Laplace, la funzione di trasferimento si scrive come:

$$W(s) = \sum_{i=1}^n \frac{C R_i B}{s - \lambda_i} + D = \sum_{i=1}^n \frac{C u_i v_i^T B}{s - \lambda_i} + D$$

da cui segue che un modo naturale è presente come polo nella funzione di trasferimento solo se è *osservabile in uscita* ed *eccitabile per impulsi in ingresso*. Altrimenti si dice che c'è stata una *cancellazione polo/zero*. In questi casi, non si riesce ad eccitare tale modo con alcun ingresso, oppure non si riesce a vederlo in uscita, ma, comunque, è presente nell'evoluzione dello stato e andrebbe tenuto in conto, specie se instabile;

Per poter tornare nel dominio del tempo, le risposte del sistema devono essere *antitraformate*. Esiste una formula diretta per antitraformare una funzione di variabile complessa  $s$ , ma è troppo onerosa: per la maggior parte dei casi della Teoria dei Sistemi, è bene notare come le trasformate di Laplace delle risposte (forzata o libera, dello stato o dell'uscita) è quasi sempre un rapporto proprio di polinomi (a meno che non si scelga come ingresso una funzione diversa da impulsi, costanti, rampe, esponenziali ed armoniche). Per questa classe di funzioni, l'antitraformata può calcolarsi facilmente sfruttando la decomposizione in fratti semplici (o multipli) e, poi, sfruttando le proprietà della trasformata di Laplace.

### 3.3.1 Esempio

Sia dato il seguente sistema lineare, a tempo continuo, stazionario:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad x(t) \in \mathbb{R}^3, \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ -1].$$

i) Calcolare per quali valori dello stato iniziale  $x(0)$ , l'evoluzione libera dell'uscita è pari a

$$y_d(t) = \frac{1}{5}te^{-2t}$$

ii) calcolare la risposta forzata del sistema per un ingresso a gradino;

iii) calcolare la risposta forzata del sistema per l'ingresso  $u(t) = t^2$ .

**Svolgimento.** i) Dal calcolo dell'evoluzione libera dell'uscita:

$$\begin{aligned} Y_{\text{lib}}(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) = [1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 1 & 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} x(0) \\ &= \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+4)} [1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} (s+2)^2 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ -(s+1) & -(s+1) & (s+1)^2 \end{bmatrix} x(0) \\ &= \frac{[(s+2)^2 + s+1 \quad s+1 \quad -(s+1)^2]x(0)}{(s+1)(s+2)^2} \\ &= \frac{(x_1(0) - x_3(0))s^2 + (5x_1(0) + x_2(0) - 2x_3(0))s + 5x_1(0) + x_2(0) - x_3(0)}{(s+1)(s+2)^2} \end{aligned}$$

Ponendo a confronto questa espressione con la trasformata di Laplace dell'uscita desiderata:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{5}te^{-2t} \right] = \frac{1}{5} \frac{1}{(s+2)^2},$$

e applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} x_1(0) - x_3(0) = 0, \\ 5x_1(0) + x_2(0) - 2x_3(0) = \frac{1}{5}, \\ 5x_1(0) + x_2(0) - x_3(0) = \frac{1}{5}, \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} x_3(0) = 0, \\ x_1(0) = x_3(0) = 0, \\ x_2(0) = \frac{1}{5}, \end{cases}$$

si ottiene che solo in corrispondenza di

$$x(0) = \frac{1}{5}(0 \ 1 \ 0)^T$$

l'evoluzione libera dell'uscita soddisfa la specifica al punto i) dell'esercizio.

ii) Dal calcolo della funzione di trasferimento  $W(s)$ :

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \begin{bmatrix} * & * & -(s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{s+1}{(s+2)^2}$$

Il calcolo della risposta forzata al gradino passa attraverso la decomposizione in fratti multipli:

$$Y_{\text{for}}(s) = -\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2^1}{s+2} + \frac{R_2^2}{(s+2)^2},$$

con

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{s+1}{(s+2)^2} = -\frac{1}{4}, \\ R_2^2 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow -2} -\frac{s+1}{s} = -\frac{1}{2}, \\ R_2^1 &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ -\frac{s+1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Per cui:

$$y_{\text{for}}(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}.$$

iii) La risposta forzata per l'ingresso  $u(t) = t^2$ , nel dominio complesso, vale:

$$Y_{\text{for}}(s) = -\frac{s+1}{(s+2)^2} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{R_1^1}{s+2} + \frac{R_1^2}{(s+2)^2} + \frac{R_2^1}{s} + \frac{R_2^2}{s^2} + \frac{R_2^3}{s^3},$$

con

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow -2} -\frac{2(s+1)}{s^3} = -\frac{1}{4}, \\ R_1^1 &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^2 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ -\frac{2(s+1)}{s^3} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} -\frac{2(s-3(s+1))}{s^4} = -\frac{1}{8}, \\ R_2^3 &= \lim_{s \rightarrow 0} s^3 Y_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2(s+1)}{(s+2)^2} = -\frac{1}{2}, \\ R_2^2 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ s^3 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ -\frac{2(s+1)}{(s+2)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{2(s+2-2(s+1))}{(s+2)^3} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{(s+2)^3} = 0, \\ R_2^1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ s^3 Y_{\text{for}}(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s}{(s+2)^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2-3s}{(s+2)^4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Antitrasformando, si ottiene la seguente risposta forzata al segnale in ingresso:

$$y_{\text{for}}(t) = -\frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}.$$

### 3.4 Interpretazione con la trasformata di Laplace di alcune risposte a regime permanente

Di seguito analizziamo con gli *occhi* della trasformata di Laplace alcune risposte a regime permanente a tempo continuo precedentemente trattate nel solo dominio del tempo.

#### 3.4.1 Risposta a regime all'impulso

Abbiamo visto che la risposta a regime permanente a un impulso è identicamente nulla. Questo risultato è supportato dall'analogo calcolo nel dominio di Laplace. A tale scopo sfruttiamo l'uguaglianza dei limiti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

qualora entambi esistano. Per quel che riguarda il limite nel dominio del tempo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau) \delta(\tau-t_0) d\tau \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = y_{\text{reg}}$$

Per quel che riguarda il dominio complesso:

$$Y_{\text{for}}(s) = W(s) \cdot \mathcal{L}[\delta(t)] = W(s)$$

e, quindi:

$$y_{\text{reg}} = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y_{\text{for}}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_{\text{for}}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_{\text{for}}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) = 0$$

Quest'ultimo limite è nullo perché la  $W(s)$  non può avere poli nulli (altrimenti ci sarebbero autovalori non asintoticamente stabili, e non esisterebbe la risposta a regime permanente).

#### 3.4.2 Risposta a regime al gradino

Considereremo un gradino che ha inizio in  $t_0$ , per cui supporremo che anche l'inizio dell'applicazione del gradino vada a  $-\infty$ . Per cui:

$$\begin{aligned} y_{\text{reg}}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \delta_{-1}(\tau-t_0) d\tau = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) e^{-s\theta} d\theta = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[W(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) \end{aligned}$$

Dunque, la risposta a regime permanente al gradino è una costante e pari  $W(s=0)$ .

#### 3.4.3 Risposta a regime a un'esponenziale

Consideriamo un segnale esponenziale del tipo  $u(t) = e^{at}$ :

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) e^{a\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) e^{a(t-\theta)} d\theta = e^{at} \mathcal{L}[W(t)] \Big|_{s=a}$$

Dunque, se l'argomento dell'esponenziale è un numero reale, avremo che la risposta a regime è un'esponenziale che cresce/decrece con la stessa costante  $a$ , moltiplicata per la funzione di trasferimento trasformata con Laplace e calcolata in  $s = a$ . È bene ricordare che, in questo caso, la

trasformata di Laplace esiste per opportuni valori del parametro  $a$  dell'esponenziale. Infatti, andando a esplicitare la decomposizione spettrale dell'esponenziale di matrice:

$$y_{\text{reg}}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} e^{a(t-\theta)} d\theta \right) C u_i v_i^T B$$

Da cui l'integrale diventa:

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda_i \theta} e^{a(t-\theta)} d\theta = e^{at} \int_0^{+\infty} e^{(\lambda_i - a)\theta} d\theta = \frac{e^{at}}{\lambda_i - a} \lim_{M \rightarrow +\infty} (e^{(\lambda_i - a)M} - 1)$$

Quindi, tali limiti esistono per

$$a > \max_{i=1, \dots, n} \{\text{Re}[\lambda_i]\}$$

e la risposta a regime permanente vale

$$y_{\text{reg}}(t) = e^{at} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a - \lambda_i} C u_i v_i^T B$$

Dunque, se l'ingresso è un'esponenziale, avremo che la risposta a regime è un'esponenziale dello stesso tipo di quella in ingresso, supposto che la costante dell'esponenziale consenta l'esistenza del limite.

### 3.4.4 Risposta armonica

La risposta armonica consiste nella risposta a regime permanente per un segnale di ingresso armonico, ossia un seno o un coseno di pulsazione  $\omega$ . Nel caso del coseno, possiamo sfruttare la scomposizione con esponenziali complesse:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

così che si possa applicare la risposta a regime permanente per ingressi esponenziali:

$$\begin{aligned} y_{\text{arm}}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t - \tau) \cos(\omega \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) \cos(\omega(t - \theta)) d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{e^{j\omega(t-\theta)}}{2} d\theta + \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{e^{-j\omega(t-\theta)}}{2} d\theta = \frac{e^{j\omega t} W(j\omega)}{2} + \frac{e^{-j\omega t} W(-j\omega)}{2} \\ &= \frac{e^{j\omega t} |W(j\omega)| e^{j\angle W(j\omega)}}{2} + \frac{e^{-j\omega t} |W(j\omega)| e^{-j\angle W(j\omega)}}{2} = |W(j\omega)| \cos(\omega t + \angle W(j\omega)) \end{aligned}$$

E, analogamente, la risposta armonica all'ingresso  $u(t) = \sin(\omega t)$  sarà:

$$|W(j\omega)| \sin(\omega t + \angle W(j\omega))$$

Dunque, esaurito il transitorio, un sistema lineare eccitato da un armonica di pulsazione  $\omega$  avrà, a regime, un'armonica della stessa pulsazione, amplificata (o attenuata) del fattore  $|W(j\omega)|$  e sfasata dell'angolo  $\angle W(j\omega)$ . La prossima sezione descrive un metodo per rappresentare in modo efficace e veloce la risposta armonica al variare della pulsazione.

### 3.5 Diagrammi di Bode

Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo continuo, il cui legame ingresso/uscita sia descritto dalla funzione di trasferimento  $W(s)$ , che consiste in un rapporto di polinomi nella variabile complessa  $s$ ; in assenza di un legame diretto ingresso/uscita ( $D = 0$ ),  $W(s)$  è un rapporto strettamente proprio di polinomi. Porre in *forma canonica* la funzione di trasferimento equivale a scriverla, in modo univoco, come rapporto delle potenze dei seguenti fattori:

- i) *guadagno di Bode*:  $K$ . È la costante moltiplicativa risultante dalla scomposizione nei fattori canonici sopra descritti della funzione di trasferimento;
- ii) *termini monomi*:  $s$ . Corrispondono a zeri/poli nell'origine;
- iii) *termini binomi*:  $1 \pm \tau s$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . Corrispondono a zeri/poli reali;  $\omega_t = \frac{1}{\tau}$  è detta *pulsazione di taglio* del termine binomio;
- iv) *termini trinomi*:

$$1 \pm \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad 0 \leq \zeta < 1, \quad \omega_n > 0$$

Corrispondono a coppie di zeri/poli complessi coniugati;  $\zeta$  e  $\omega_n$  sono, rispettivamente, lo *smorzamento* e la *pulsazione naturale* del termine trinomio.

I diagrammi di Bode sono le rappresentazioni in scala logaritmica del modulo (espresso linearmente in decibel) e in scala semilogaritmica della fase della funzione di trasferimento calcolata in  $s = j\omega$ , al variare della pulsazione  $\omega \in (0, +\infty)$  (espressa in scala logaritmica). In virtù delle proprietà dei logaritmi e delle fasi, entrambi i diagrammi di Bode possono rappresentarsi come somma algebrica dei contributi dei singoli diagrammi dei fattori canonici sopra descritti: i contributi dei termini al numeratore si sommano, quelli dei termini al denominatore si sottraggono ed eventuali potenze di ordine 2, 3 o  $p$ , raddoppiano, triplicano o moltiplicano per un fattore  $p$  i contributi del termine. Di seguito sono descritte l'analisi e la rappresentazione dei diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi dei singoli fattori canonici. Sulle ascisse di entrambi sono riportate le pulsazioni in scala logaritmica; le ordinate dei primi sono espresse in decibel (si ricordi che  $|M|_{\text{dB}} = 20 \log |M|$ ), le ordinate dei secondi in radianti. Si fa riferimento al termine *decade* per indicare il generico intervallo di ampiezza unitaria in scala logaritmica, ossia l'intervallo  $[\omega_1, \omega_2]$  costituisce una decade se  $\omega_2 = 10\omega_1$ .

#### 3.5.1 Guadagno di Bode $K$

In assenza di termini monomi il guadagno di Bode costituisce il guadagno alle basse frequenze, e si calcola come:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s).$$

Se c'è la potenza di un termine monomio al denominatore (sia  $s^p$ ,  $p > 0$ ), si ha un'amplificazione infinita alle basse frequenze, e il guadagno di Bode si calcola come:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^p W(s).$$

Se la potenza di un termine monomio è presente al numeratore, alle basse frequenze la risposta del sistema è nulla ( $-\infty$  in dB), e il guadagno di Bode vale:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(s)}{s^p}.$$

Il guadagno di Bode produce nelle ampiezze un'amplificazione uniforme al variare della pulsazione  $\omega$ , che si riflette sul diagramma dei moduli con una traslazione del grafico di una quantità pari a  $20 \log |K|$ . Per questo motivo la retta a  $|K|_{\text{dB}}$  è utilizzata come riferimento per le ordinate nei diagrammi di Bode delle ampiezze, vedi Figura 3.1. Si noti che tale riferimento coincide con la retta coordinata delle ascisse per un'amplificazione unitaria:  $K = 1$ .

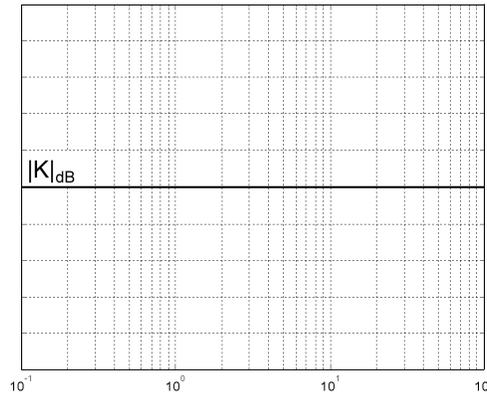


Figura 3.1 - Diagramma di Bode delle ampiezze del guadagno di Bode

Per quel che riguarda la fase, il guadagno di Bode non dà alcun contributo se  $K$  è positivo:  $\angle K = 0$ ; nel caso in cui  $K$  è negativo, sfasa uniformemente il diagramma di  $\pi$  radianti:  $\angle K = \pi$ . In questo caso, dunque, sono il segno del guadagno di Bode (e, vedremo, anche i termini monomi) a determinare il riferimento per le ordinate nei diagrammi di Bode delle fasi, vedi Figura 3.2. Tale riferimento coincide con la retta coordinata delle ascisse con un guadagno di Bode positivo.

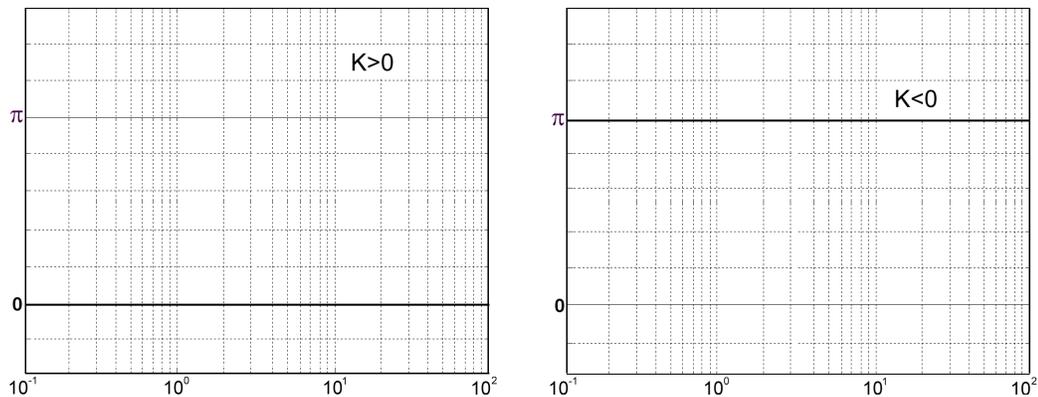


Figura 3.2 - Diagramma di Bode delle fasi del guadagno di Bode

### 3.5.2 Termine monomio

Il diagramma di Bode delle ampiezze è una retta con pendenza 20dB/dec, che taglia i 0dB in corrispondenza della pulsazione di 1 rad/sec; la fase è, invece, costante al variare di  $\log(\omega)$  e vale  $\pi/2$  radianti, vedi Figura 3.3:

$$|j\omega|_{\text{dB}} = 20 \log |j\omega| = 20 \log(\omega), \quad \angle(j\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

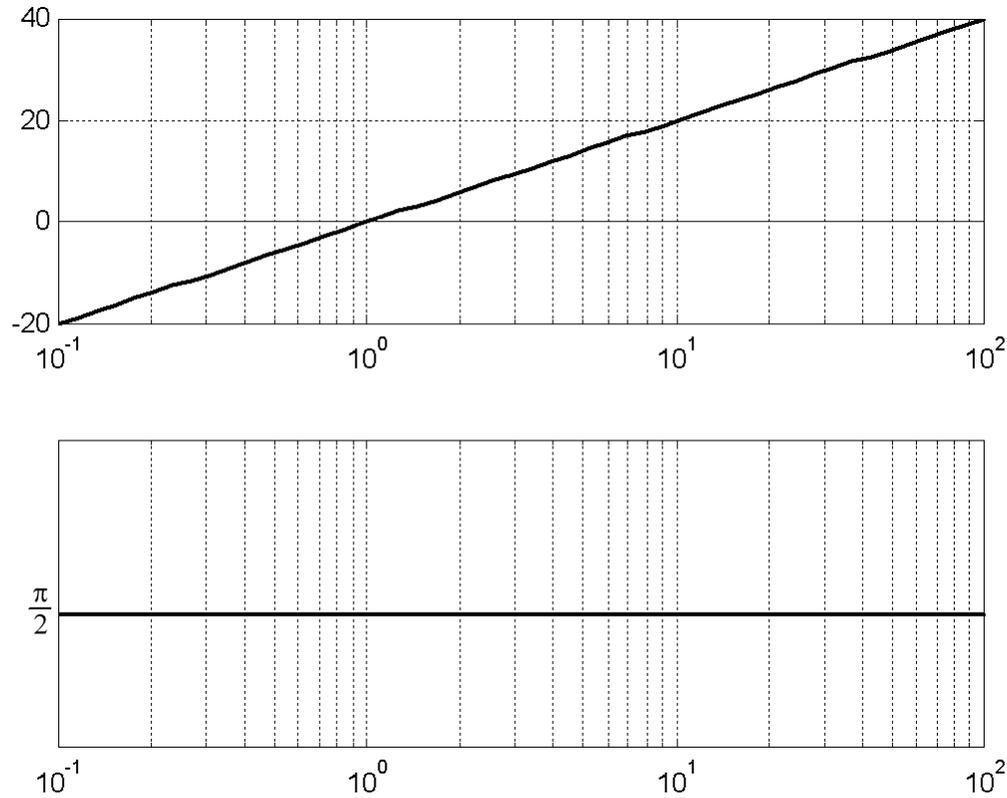


Figura 3.3 - Diagrammi di Bode di un termine monomio

### 3.5.3 Termine binomio

$$|1 \pm j\tau\omega|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\omega^2}, \quad \angle(1 \pm j\tau\omega) = \pm \arctan(\tau\omega).$$

A differenza dei monomi, i diagrammi di Bode dei termini binomi e trinomi non hanno un andamento lineare rispetto a  $\log \omega$ . Per la loro rappresentazione è consigliabile svolgere l'analisi del loro comportamento asintotico, in base al quale è possibile approssimare i diagrammi con opportune spezzate lineari a tratti. Questi diagrammi, noti come *diagrammi asintotici*, sono lo strumento per disegnare a mano con buona approssimazione i veri diagrammi di Bode. I punti di non derivabilità sono detti *punti di rottura* del diagramma asintotico. Dall'analisi alle basse frequenze, per pulsazioni

inferiori a quella di taglio ( $\omega \ll \omega_t$ ):

$$1 + \tau^2 \omega^2 \simeq 1 \quad \implies \quad |1 + j\tau\omega|_{\text{dB}} \simeq 20 \log(1) = 0\text{dB},$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta costante e pari a 0dB; alle alte frequenze, per pulsazioni superiori a quella di taglio ( $\omega \gg \omega_t$ ):

$$1 + \tau^2 \omega^2 \simeq \tau^2 \omega^2 \quad \implies \quad |1 + j\tau\omega|_{\text{dB}} \simeq 20 \log |\tau\omega| = 20(\log(\omega) - \log(\omega_t)),$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta di pendenza 20dB/dec, che taglia i 0dB in corrispondenza della pulsazione di taglio  $\omega_t$ . Raccordando queste due rette nel loro punto di intersezione si disegna il diagramma asintotico, vedi Figura 3.4. Il massimo scostamento del diagramma di Bode dal diagramma asintotico si ottiene per la pulsazione di taglio  $\omega_t$ , ed è pari a:

$$20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega_t^2} = 20 \log \sqrt{2} \simeq 3.01\text{dB}.$$

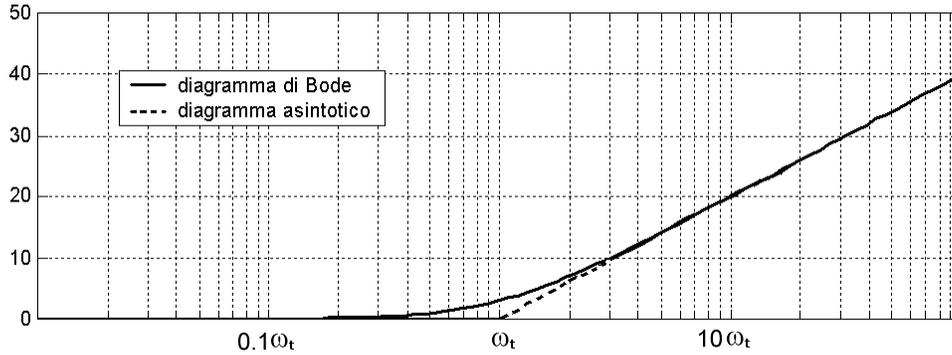


Figura 3.4 - Diagramma di Bode delle ampiezze di un termine binomio

Anche per quel che riguarda le fasi, si considera l'analisi asintotica del diagramma. Consideriamo il segno '+' nel termine binomio  $1 + \tau s$ . Alle basse frequenze ( $\omega \ll \omega_t$ ), il termine binomio può confondersi con la sua parte reale, per cui la fase assume un andamento costante e pari a zero; alle alte frequenze ( $\omega \gg \omega_t$ ), il termine binomio può confondersi con la sua parte immaginaria, per cui la fase assume un andamento costante e pari a  $\pi/2$  radianti. In questo caso non c'è intersezione tra i due andamenti asintotici. Per ottenere un diagramma lineare a tratti che approssimi in modo esauriente il diagramma delle fasi, si sfruttano le caratteristiche di simmetria del grafico: il diagramma di Bode delle fasi in scala semilogaritmica gode di simmetria centrale rispetto al punto  $(\omega_t, \pi/4)$ . Una possibilità consiste nel raccordare i due andamenti asintotici con un segmento di pendenza  $\pi/4$  rad/sec che passi per il centro di simmetria del diagramma. Tale segmento approssima il diagramma nell'intervallo di due decadi centrato nella pulsazione di taglio, vedi Figura 3.5.

Il massimo scostamento delle fasi dal diagramma asintotico si ha nei punti di rottura della spezzata ( $0.1\omega_t$  e  $10\omega_t$ ) e vale:

$$\begin{cases} \arctan(\tau \cdot 0.1\omega_t) = \arctan(0.1) \simeq 0.10 \text{ rad}, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau \cdot 10\omega_t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(10) \simeq 0.10 \text{ rad}, \end{cases}$$

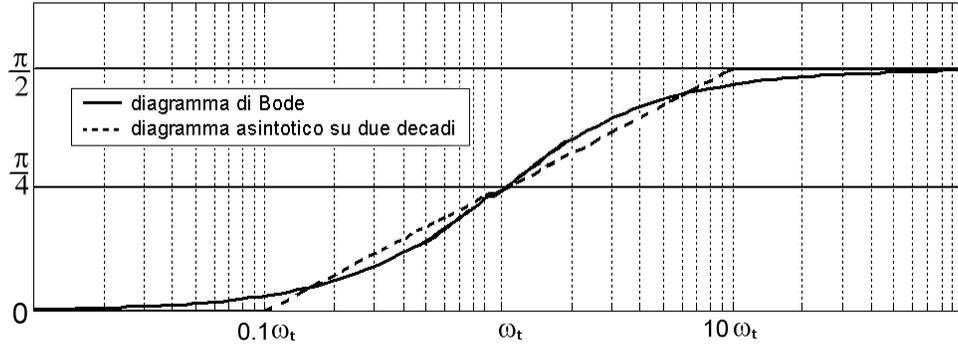


Figura 3.5 - Diagramma di Bode delle fasi del termine binomio  $1 + \tau s$

ossia meno di 6 gradi (i due valori sono uguali, data la simmetria della curva).

Un diagramma asintotico alternativo consiste nel raccordare i due andamenti asintotici con la retta tangente la curva in  $(\omega_t, \frac{\pi}{4})$ . In questo modo migliora l'approssimazione nell'intorno della pulsazione di taglio, ma peggiora quella nei punti di rottura del diagramma asintotico.

Considerando il segno '-' nel termine binomio  $1 - \tau s$ , il diagramma dei moduli non cambia, mentre quello delle fasi è simmetrico rispetto all'asse delle pulsazioni. Cambia, infatti, il segno della parte immaginaria, per cui cambia il segno della fase, vedi Figura 3.6.

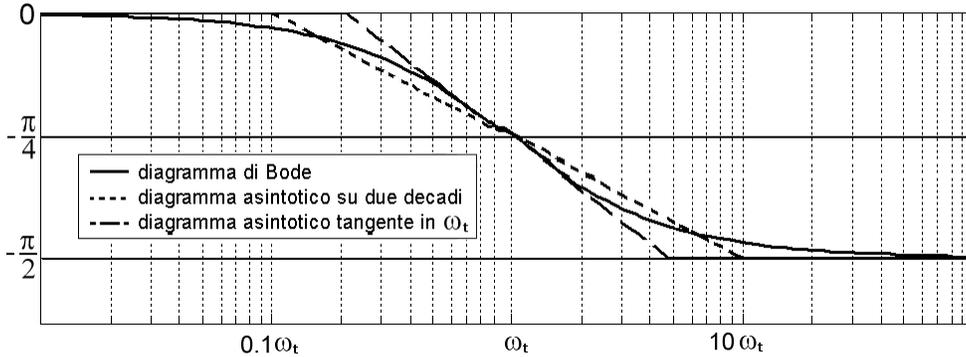


Figura 3.6 - Diagramma di Bode delle fasi di un termine binomio  $1 - \tau s$

### 3.5.4 Termine trinomio

$$1 \pm \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad |\zeta| \leq 1, \quad \omega_n > 0.$$

$$\left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\angle \left( 1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = \pm \arctan \left( \frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

Anche per il termine trinomio è necessaria l'analisi asintotica per poter approssimare i diagrammi con opportune spezzate lineari a tratti. Alle basse frequenze, ossia per pulsazioni inferiori a quella naturale ( $\omega \ll \omega_n$ ):

$$1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \simeq 1 \implies \left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} \simeq 20 \log(1) = 0\text{dB},$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta costante e pari a 0dB; alle alte frequenze, per pulsazioni superiori a quella naturale ( $\omega \gg \omega_n$ ):

$$1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \simeq -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \implies \left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} \simeq 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = 40(\log \omega - \log \omega_n),$$

il diagramma dei moduli si approssima con una retta di pendenza 40dB/dec, che taglia i 0dB nella pulsazione naturale  $\omega_n$ . Raccordando queste due rette nel loro punto di intersezione, si ottiene il diagramma asintotico. Lo scostamento, espresso in decibel, per  $\omega = \omega_n$  è pari a:

$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega_n^2}{\omega_n^2}} = 20 \log |2\zeta|,$$

da cui si evince che:

- quando il termine trinomio si scompone nel quadrato di un binomio ( $\zeta = 1$ ), tale scostamento vale  $20 \log(2) \simeq 6.02\text{dB}$ , vedi Figura 3.7;

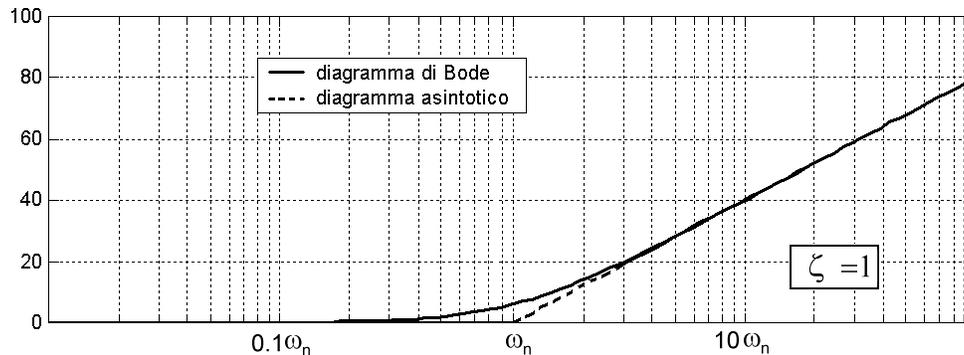


Figura 3.7 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio:  $\zeta = 1$

- per valori di  $\zeta$  maggiori di  $\frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{2} < \zeta \leq 1$ ), lo scostamento è positivo e si annulla per  $\zeta = 1/2$ . Si noti che l'annullamento nel punto di rottura non determina l'uguaglianza tra i due diagrammi, pur rendendo il diagramma asintotico molto prossimo a quello di Bode
- per valori di  $\zeta$  inferiori a  $1/2$  ( $0 < \zeta \leq \frac{1}{2}$ ), il diagramma di Bode presenta un picco di risonanza in prossimità di  $\omega_n$ , di cui il diagramma asintotico non tiene conto (per essere precisi si parla di *antirisonanza* se il termine trinomio è al numeratore, in quanto, in quel caso, c'è

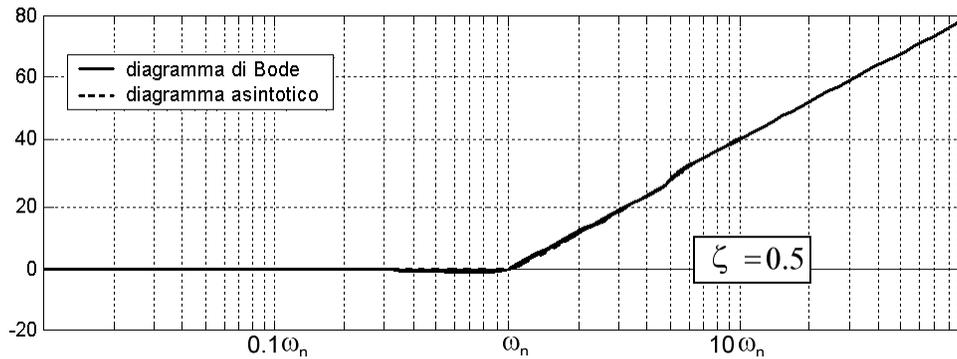


Figura 3.8 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio:  $\zeta=0.5$

un'attenuazione delle ampiezze). Per determinare la *pulsazione di risonanza*  $\omega_r$  è necessario calcolare il minimo del modulo del termine trinomio che risulta essere pari a:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad 0 \leq \zeta < \frac{1}{2},$$

cui corrisponde:

$$\left| 1 \pm \frac{2j\zeta\omega_r}{\omega_n} - \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} \right| = 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Come si può notare, la pulsazione di risonanza precede sempre quella naturale ( $\omega_r \leq \omega_n$ ); al decrescere di  $\zeta$  il picco di risonanza è sempre più accentuato e la pulsazione di risonanza tende ad avvicinarsi a quella naturale: di conseguenza, il diagramma asintotico è sempre meno adatto ad approssimare il diagramma di Bode nell'intorno di  $\omega_n$  al decrescere di  $\zeta$ . In Figura 3.9 è disegnato il modulo di un termine trinomio con  $\zeta = 0.1$ : con questo smorzamento le pulsazioni naturali e di risonanza sono sostanzialmente indistinguibili, infatti:

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2(0.1)^2} \cdot \omega_n \simeq 0.97\omega_n.$$

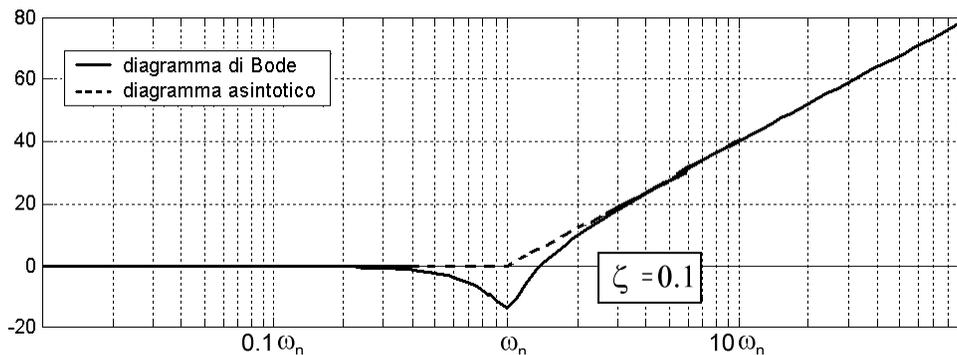


Figura 3.9 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio:  $\zeta=0.1$

- per  $\zeta = 0$ , in corrispondenza della pulsazione naturale, che coincide con quella di risonanza, c'è un asintoto verticale, di cui il diagramma asintotico non tiene conto e, dunque, non è più idoneo a descrivere l'andamento delle ampiezze nell'intorno di  $\omega_n$ . Se il termine trinomio è al numeratore (come si è supposto in questo contesto) l'asintoto produce attenuazione infinita, ossia il sistema ha una risposta nulla se eccitato con un'armonica di pulsazione  $\omega_n$ , vedi Figura 3.10.

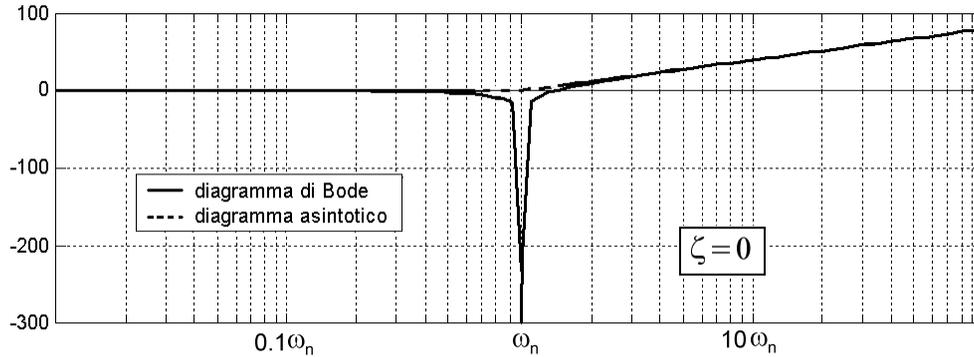


Figura 3.10 - Diagramma di Bode del modulo di un trinomio:  $\zeta=0$

- Al contrario, se il termine trinomio è al denominatore, l'asintoto produce un'amplificazione infinita se eccitato con l'armonica di pulsazione  $\omega_n$  (il diagramma di Figura 3.10 va simmetrizzato rispetto all'asse delle pulsazioni).

Per quel che riguarda l'analisi asintotica del diagramma delle fasi, consideriamo il segno '+' davanti a  $\zeta$ . Alle basse frequenze ( $\omega \ll \omega_n$ ) il trinomio si approssima con la sua parte reale, per cui la fase ha un andamento costante e pari a zero; alle alte frequenze ( $\omega \gg \omega_n$ ) il trinomio si confonde con  $-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} < 0$ , per cui la fase ha un andamento costante e pari a  $\pi$  radianti (si assume il segno '+' perché, per  $\omega$  che passa da 0 a  $+\infty$ , il trinomio è un vettore del piano complesso che ruota in senso antiorario). Analogamente al termine binomio non c'è intersezione tra i due asintoti e i diagrammi asintotici si ottengono sfruttando le proprietà di simmetria del grafico: il diagramma di Bode delle fasi in scala semilogaritmica gode di simmetria centrale rispetto al punto  $(\omega_n, \frac{\pi}{2})$ . Per ricordare gli andamenti asintotici, una tecnica consiste nel raccordare i due asintoti con un segmento di pendenza  $\frac{\pi}{2}$  rad/dec che passi per il centro di simmetria del diagramma. Tale segmento approssima il diagramma nell'intervallo di due decadi centrato nella pulsazione naturale. Questa approssimazione è buona per valori dello smorzamento prossimi in modulo all'unità ( $\zeta \simeq 1$ ): è tanto più efficace quanto più il termine trinomio si approssima con il quadrato di un binomio. In Figura 3.11 si riporta il diagramma delle fasi per  $\zeta = 1$ , mentre in Figura 3.12 si riporta il diagramma delle fasi per  $\zeta = 0.5$ .

Per valori dello smorzamento che tendono a zero, la parte immaginaria del termine trinomio diventa trascurabile rispetto alla sua parte reale, cosicché il raccordo tra 0 e  $\pi$  diventa sempre più corto e l'approssimazione con una retta di pendenza  $\pi/2$ /decade diventa sempre meno attendibile, vedi Figura 3.13 dove si riporta il caso per  $\zeta = 0.1$ .

Infine, il diagramma delle fasi assume l'andamento a gradino per  $\zeta \mapsto 0$ , come si nota in Figura 3.14. In questo caso non servono approssimazioni per rappresentare il diagramma di Bode.

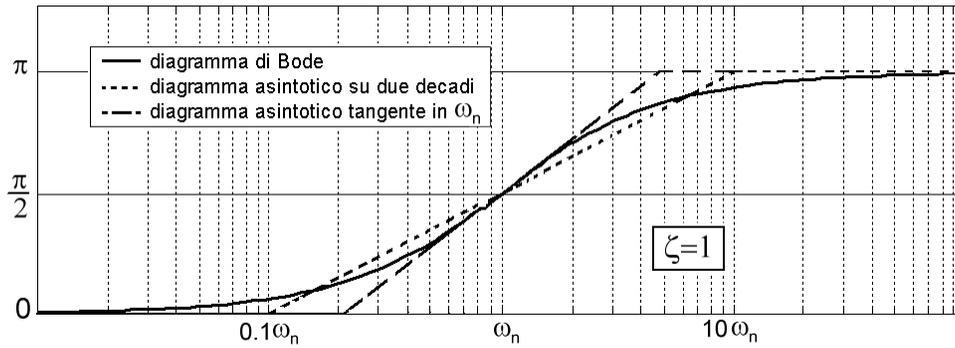


Figura 3.11 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio:  $\zeta = 1$

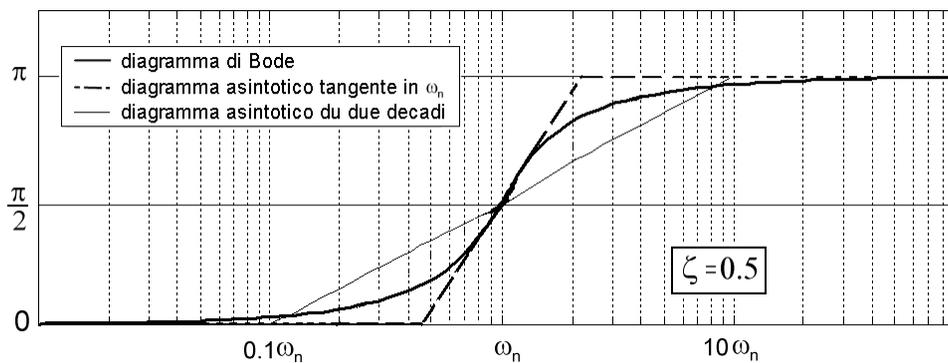


Figura 3.12 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio:  $\zeta = 0.5$

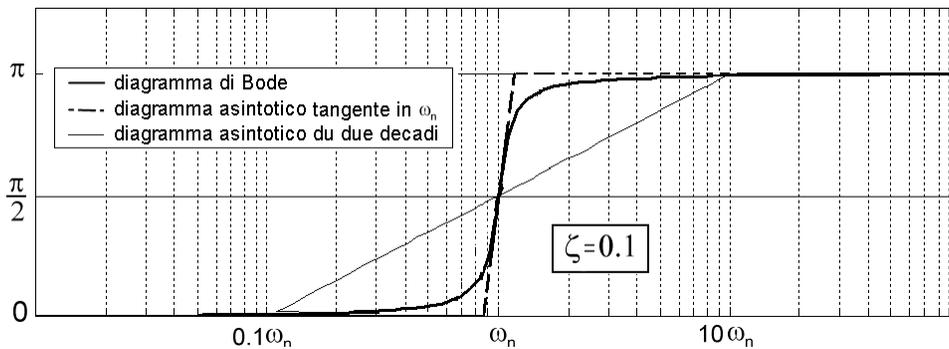


Figura 3.13 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio:  $\zeta = 0.1$

Analogamente al termine binomio, quando  $\zeta$  è negativo il diagramma dei moduli del termine trinomio non cambia, mentre quello delle fasi è simmetrico rispetto all'asse delle pulsazioni, in quanto cambia il segno della parte immaginaria, vedi Figura 3.15.

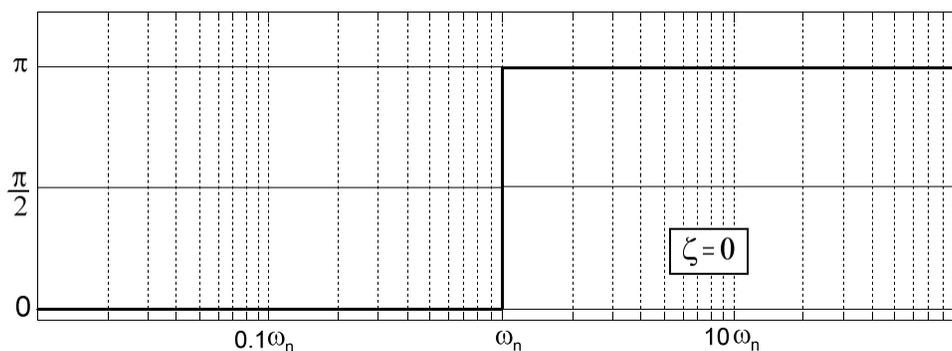


Figura 3.14 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio:  $\zeta = 0$

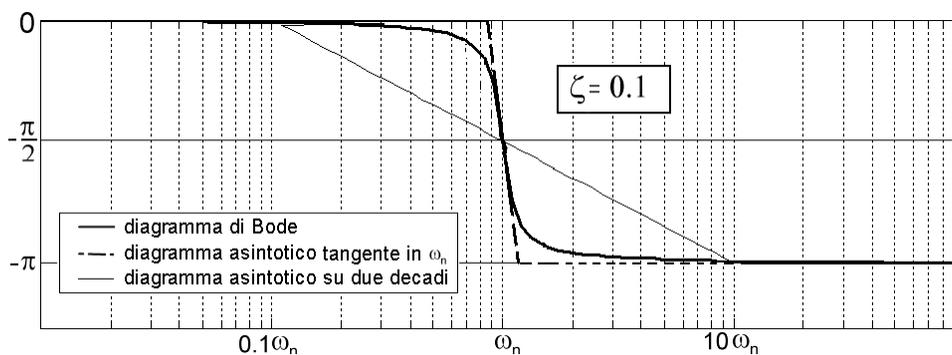


Figura 3.15 - Diagramma di Bode della fase di un trinomio col segno '-' davanti a  $\zeta = 0.1$

### 3.5.5 Esempio di diagramma di Bode con termini monomi e binomi

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{10^6}{s(s+10)^2(s-400)^2}$$

- i) Calcolare per quale pulsazione si ha un'attenuazione di 100dB;
- ii) calcolare per quali pulsazioni si ha uno sfasamento di  $-\pi$  radianti.

Riscrivendo in forma canonica i termini binomi:

$$(s+10)^2 = 100(1+\tau_1 s)^2, \quad (s-400)^2 = 16 \cdot 10^4(1-\tau_2 s)^2,$$

con

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.1 \text{sec}, & \omega_{t_1} &= 10 \text{rad/sec}, \\ \tau_2 &= 2.5 \cdot 10^{-3} \text{sec}, & \omega_{t_2} &= 400 \text{rad/sec}, \end{aligned}$$

la funzione di trasferimento diventa:

$$W(s) = \frac{K}{s(1+\tau_1 s)^2(1-\tau_2 s)^2}$$

con il guadagno di Bode  $K = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) = \frac{1}{16}$ .

**Descrizione dei diagrammi asintotici.** Non essendoci termini trinomi, i diagrammi di Bode possono confondersi, con buona approssimazione, con quelli asintotici.

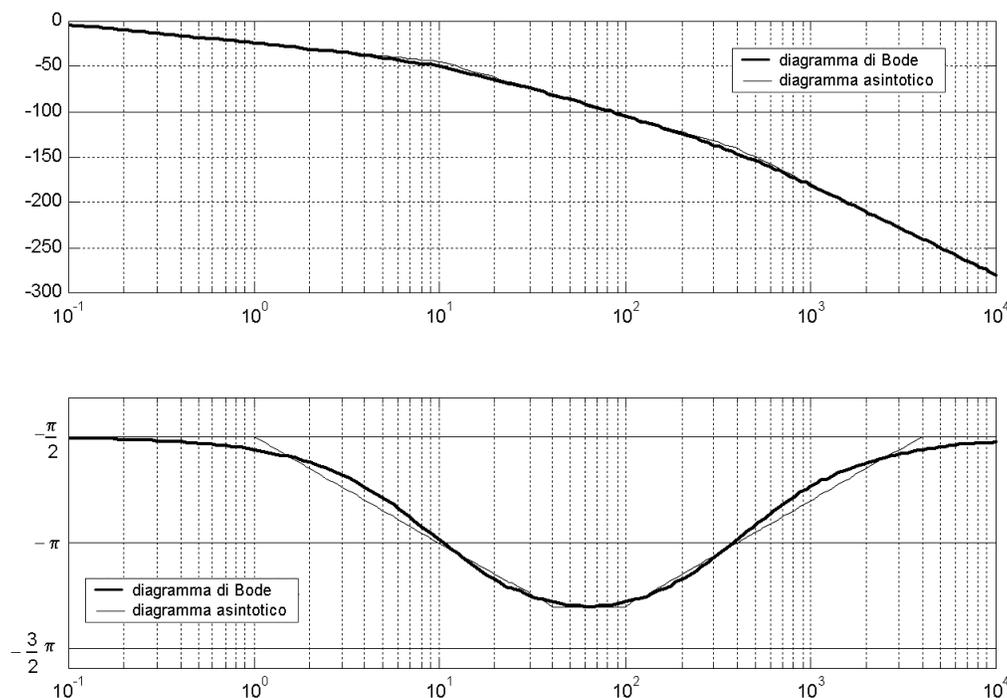


Figura 3.16 - Diagrammi di Bode

*Ampiezze.* La presenza del termine monomio al denominatore determina la pendenza del diagramma delle ampiezze alle basse frequenze, che si confonde con l'andamento di una retta inclinata di  $-20\text{dB/dec}$  e passante per il punto di ascissa  $\omega = 1\text{rad/sec}$  e ordinata  $|K|_{\text{dB}} \simeq -24.08\text{dB}$ . Tale pendenza resta tale fino alla più piccola pulsazione di taglio:  $\omega_{t_1} = 10\text{rad/sec}$ . Per valori di  $\omega$  maggiori di  $\omega_{t_1}$ , si fa sentire il primo dei due termini binomi al denominatore, per cui la pendenza diminuisce di altri  $40\text{dB/dec}$ , portandosi a  $-60\text{dB/dec}$ . Tale rimane fino alla maggiore delle pulsazioni di taglio,  $\omega_{t_2} = 400\text{rad/sec}$ , oltre la quale la pendenza diminuisce di altri  $40\text{dB/dec}$ , portandosi a  $-100\text{dB/dec}$ . Riassumendo quanto scritto sulle pendenze del diagramma asintotico:

$$\begin{aligned} \omega < 10, & & -20\text{dB/dec}, \\ 10 \leq \omega < 400, & & -60\text{dB/dec}, \\ \omega \geq 400, & & -100\text{dB/dec}. \end{aligned}$$

*Fasi.* La presenza del termine monomio al denominatore trasla tutto il diagramma delle fasi di  $-\frac{\pi}{2}$  radianti, valore a cui rimane costante per frequenze inferiori a  $1\text{rad/sec}$ , una decade prima di  $\omega_{t_1}$ , la minore delle pulsazioni di taglio. Quindi le fasi decrescono con una pendenza di  $-\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$  fino a pulsazioni inferiori a  $40\text{rad/sec}$ , una decade prima di  $\omega_{t_2}$ , la maggiore delle pulsazioni di taglio,

oltre la quale i contributi dei due termini binomi si bilanciano e le fasi si assestano a pendenza nulla nell'intervallo  $[40, 100]$ . Per pulsazioni maggiori di  $100\text{rad/sec}$  (una decade dopo  $\omega_{t_1}$ ) il primo termine binomio cessa di influenzare la pendenza, per cui il diagramma sale di  $\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$  fino a  $\omega = 4000\text{rad/sec}$  (una decade dopo  $\omega_{t_2}$ ), oltre cui le fasi tornano costanti al valore di  $-\frac{\pi}{2}$  radianti. Riassumendo quanto scritto sulle pendenze del diagramma asintotico:

$\omega < 1,$	$0\text{rad/dec},$
$1 \leq \omega < 40,$	$-(\pi/2)\text{rad/dec},$
$40 \leq \omega < 100,$	$0\text{rad/dec},$
$100 \leq \omega < 4000,$	$+(\pi/2)\text{rad/dec},$
$\omega \geq 4000,$	$0\text{rad/dec}.$

- i) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle ampiezze si nota che un'attenuazione di  $100\text{dB}$  si ottiene per pulsazioni superiori a  $\omega_{t_1} = 10\text{rad/sec}$  e inferiori a  $\omega_{t_2} = 400\text{rad/sec}$ , per cui sono plausibili le seguenti semplificazioni:

$$|1 + j\tau_1\omega| \simeq |j\tau_1\omega| = \tau_1\omega, \quad |1 - j\tau_2\omega| \simeq 1.$$

**Analisi quantitativa:** attenuazione di  $100\text{dB}$  significa:

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = -100 \Rightarrow 20 \log |W(j\omega)| = -100 \Rightarrow |W(j\omega)| = 10^{-5},$$

da cui

$$|W(j\omega)| \simeq \frac{1}{16|j\omega| \cdot |j\tau_1\omega|^2} = 10^{-5} \implies \omega^3 = \frac{1}{16 \cdot 10^{-7}},$$

e quindi  $\omega = \bar{\omega} \simeq 85.50\text{rad/sec}$ . Come verifica della validità delle approssimazioni assunte, si calcolano in  $\bar{\omega}$  gli errori commessi nell'approssimazione dei due termini binomi:

$$\left| (1 + j\tau_1\bar{\omega})^2 \right|_{\text{dB}} - \left| (j\tau_1\bar{\omega})^2 \right|_{\text{dB}} \simeq 20 \log(74.10) - 20 \log(73.10) \simeq 0.12\text{dB},$$

$$\left| (1 + j\tau_2\bar{\omega})^2 \right|_{\text{dB}} \simeq 20 \log(1.05) \simeq 0.39\text{dB},$$

per cui:

$$|W(j\bar{\omega})|_{\text{dB}} \simeq -100 + 0.12 - 0.39 \simeq -100.27\text{dB},$$

ossia un errore inferiore allo  $0.3\%$ .

- ii) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle fasi si nota che vi sono due attraversamenti a  $-\pi$  radianti. Anche in questo caso è possibile introdurre delle approssimazioni per semplificare i conti. Dai diagrammi in figura 3.16 segue che la minore delle pulsazioni a  $-\pi$  radianti cade ben prima che il binomio caratterizzato dalla pulsazione di taglio  $\omega_{t_2} = 400\text{rad/sec}$  possa influenzare le fasi, per cui, in prossimità della pulsazione di primo attraversamento a  $-\pi$  radianti:

$$\angle(1 - j\tau_2\omega)^2 \simeq 0,$$

da cui

$$\angle W(j\omega) \simeq -\frac{\pi}{2} - 2\angle(1 + j\tau_1\omega) = -\pi \implies \angle(1 + j\tau_1\omega) = \frac{\pi}{4}$$

$$\implies \tau_1\omega = 1 \implies \omega = \omega_1^* \simeq \omega_{t_1} = 10\text{rad/sec}.$$

Viceversa, la maggiore delle pulsazioni di attraversamento a  $-\pi$  radianti si incontra per pulsazioni maggiori di una decade di  $\omega_{t_1}$ , per cui il termine binomio ad essa associato può immaginarsi stabilizzato a  $\pi$  radianti:

$$\angle(1 + j\tau_1\omega)^2 \simeq \pi,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &\simeq -\frac{\pi}{2} - \pi - 2\angle(1 - j\tau_2\omega) = -\pi \implies \angle(1 - j\tau_2\omega) = -\frac{\pi}{4} \\ \implies \tau_2\omega &= 1 \implies \omega = \omega_2^* \simeq \omega_{t_2} = 400\text{rad/sec.} \end{aligned}$$

**Analisi quantitativa:** per valutare la bontà delle approssimazioni assunte, si calcolano gli errori di approssimazione in corrispondenza delle pulsazioni di attraversamento a  $-\pi$  radianti:

$$\begin{aligned} \angle(1 - j\tau_2\omega_1^*)^2 &= 2\angle\left(1 - \frac{j}{40}\right) \simeq -5.00 \cdot 10^{-2}\text{rad}, \\ \angle(1 + j\tau_1\omega_2^*)^2 &= 2\angle(1 + j40) \simeq 3.09\text{rad}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\angle W(j\omega_1^*) \simeq -\pi + 5.00 \cdot 10^{-2} \simeq -3.09\text{rad}, \quad \angle W(j\omega_2^*) \simeq -\pi + (\pi - 3.09) \simeq -3.09\text{rad}.$$

In entrambi i casi si commette un errore di valutazione di circa 0.05 radianti, inferiore ai 3 gradi.

### 3.5.6 Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio smorzato

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{2000(10 - s)^2}{(s + 100)(s + 500)(s^2 + 2s + 4)}.$$

- i) Calcolare per quale pulsazione si ha un'attenuazione di 20dB;
- ii) calcolare per quale pulsazione si ha uno sfasamento di  $-\pi$  radianti.

**Svolgimento.** Come primo passo è necessario riscrivere i termini binomi in forma canonica:

$$(10 - s)^2 = 100 \left(1 - \frac{s}{10}\right)^2 = 100(1 - \tau_1 s)^2,$$

$$s + 100 = 100 \left(1 + \frac{s}{100}\right) = 100(1 + \tau_2 s),$$

$$s + 500 = 500 \left(1 + \frac{s}{500}\right) = 500(1 + \tau_3 s),$$

con

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.1\text{sec}, & \omega_{t_1} &= 10\text{rad/sec}, \\ \tau_2 &= 0.01\text{sec}, & \omega_{t_2} &= 100\text{rad/sec}, \\ \tau_3 &= 0.002\text{sec}, & \omega_{t_3} &= 500\text{rad/sec}. \end{aligned}$$

Il termine trinomio ha radici complesse e coniugate. Scrivendolo in forma canonica:

$$s^2 + 2s + 4 = 4 \left( 1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4} \right) = 4 \left( 1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right),$$

con  $\omega_n = 2\text{rad/sec}$  e  $\zeta = 0.5$ , la funzione di trasferimento diventa:

$$W(s) = \frac{2000 \cdot 100(1 - \tau_1 s)^2}{100(1 + \tau_2 s) \cdot 500(1 + \tau_3 s) \cdot 4 \left( 1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)} = \frac{(1 - \tau_1 s)^2}{(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s) \left( 1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)},$$

con un guadagno di Bode unitario:  $K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = 1$ .

**Descrizione dei diagrammi asintotici.** Lo smorzamento del termine trinomio vale 0.5: i diagrammi asintotici delle ampiezze e delle fasi approssimano bene quelli di Bode, come si può osservare dal grafico di Figura 3.17.

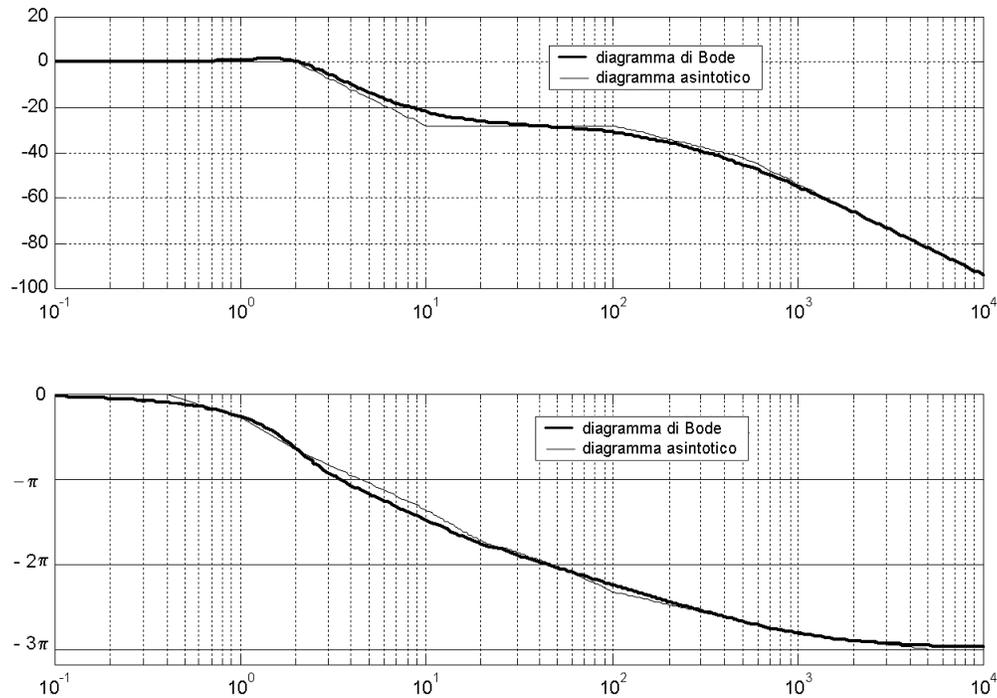


Figura 3.17 - Diagramma di Bode

*Ampiezze.* Non essendoci termini monomi, l'amplificazione alle basse frequenze è pari al guadagno di Bode e vale 0dB. Questa situazione persiste per pulsazioni inferiori alla più piccola pulsazione di taglio, che in questo caso coincide con la pulsazione naturale  $\omega_n = 2\text{rad/sec}$ . Quindi, per valori della pulsazione superiori, il termine trinomio produce una pendenza di -40dB/dec fino alla pulsazione di taglio del binomio al numeratore:  $\omega_{t_1} = 10\text{rad/sec}$ . Per pulsazioni superiori, il binomio al quadrato del numeratore bilancia il trinomio del denominatore, per cui si torna ad una pendenza nulla fino

alla più piccola pulsazione di taglio successiva,  $\omega_{t_2} = 100\text{rad/sec}$ , quando il termine binomio al denominatore fa nuovamente pendere il diagramma asintotico di  $-20\text{dB/dec}$ . Infine, per pulsazioni maggiori della pulsazione di taglio  $\omega_{t_3} = 500\text{rad/sec}$ , il diagramma acquista la definitiva pendenza di  $-40\text{dB/dec}$ . Riassumendo quanto scritto riguardo alle pendenze del diagramma asintotico dei moduli:

$\omega < 2,$	$0\text{dB/dec}$
$2 \leq \omega < 10,$	$-40\text{dB/dec}$
$10 \leq \omega < 100,$	$0\text{dB/dec}.$
$100 \leq \omega < 500,$	$-20\text{dB/dec},$
$\omega \geq 500,$	$-40\text{dB/dec}.$

*Fasi.* Non essendoci termini monomi, né guadagni di Bode negativi, non ci sono sfasamenti uniformi rispetto alle pulsazioni. Il diagramma asintotico del termine trinomio prevederà il raccordo tra  $0$  e  $\pi$  una decade prima e una decade dopo  $\omega_n$ , ossia i punti di rottura del diagramma asintotico del termine trinomio sono  $0.2\text{rad/sec}$  e  $20\text{rad/sec}$ . Per basse frequenze, ossia per pulsazioni inferiori alla più piccola pulsazione di taglio (pari a  $0.2\text{rad/sec}$ ), il diagramma asintotico è costante e pari a zero. Quindi, il termine trinomio determina una pendenza di  $-\pi$  su due decadi finché non interviene il binomio al numeratore, una decade prima della sua pulsazione di taglio ( $\omega = 1\text{rad/sec}$ ), che diminuisce la pendenza delle fasi di altri  $\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$ , portandola a  $-3\pi/2\text{rad/dec}$ . Tale pendenza persiste fino  $\omega = 20\text{rad/sec}$ , in corrispondenza della seconda pulsazione di taglio del termine trinomio. Oltre tale pulsazione cessa l'influenza del termine trinomio sulle pendenze e inizia quella del termine binomio associato a  $\omega_{t_2}$  in ragione di una diminuzione di  $\frac{\pi}{4}\text{rad/dec}$ , per cui il diagramma delle fasi si porta alla pendenza complessiva di  $-\frac{3}{4}\pi\text{rad/dec}$ . Quindi diminuisce ulteriormente portandosi a  $-\pi\text{rad/dec}$  per  $\omega > 50\text{rad/sec}$ , quando l'ultimo termine binomio fa sentire il suo peso. La pendenza si porta a  $-\frac{\pi}{2}\text{rad/dec}$  per  $\omega > 100\text{rad/sec}$ , a  $-\frac{\pi}{4}\text{rad/dec}$  per  $\omega > 1000\text{rad/sec}$  e, infine, il diagramma delle fasi annulla la propria pendenza per  $\omega > 5000\text{rad/sec}$ , quando le pulsazioni sono maggiori di una decade oltre la più grande pulsazione di taglio. Riassumendo l'andamento delle pendenze:

$\omega < 0.4,$	$0\text{rad/dec},$
$0.4 \leq \omega < 1,$	$-\pi\text{rad/dec},$
$1 \leq \omega < 10,$	$-3\pi/2\text{rad/dec},$
$10 \leq \omega < 50,$	$-(3\pi/4)\text{rad/dec},$
$50 \leq \omega < 100,$	$-\pi\text{rad/dec},$
$100 \leq \omega < 1000,$	$-(\pi/2)\text{rad/dec},$
$1000 \leq \omega < 5000,$	$-(\pi/4)\text{rad/dec},$
$\omega \geq 5000$	$0\text{rad/dec}.$

- i) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle ampiezze si nota che un'attenuazione di  $20\text{dB}$  si ottiene per pulsazioni inferiori ai  $10\text{rad/sec}$ , per cui è plausibile trascurare per il contributo dei due termini binomi

$$1 + \frac{s}{100}, \quad 1 + \frac{s}{500}.$$

**Analisi quantitativa:** attenuazione di 20dB significa:

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \quad \Longrightarrow \quad 20 \log |W(j\omega)| = -20 \quad \Longrightarrow \quad |W(j\omega)| = \frac{1}{10}.$$

Utilizzando le semplificazioni di cui sopra:

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &\simeq \frac{|1-j\tau_1\omega|^2}{\left|1+\frac{2j\zeta\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right|} = \frac{1}{10} \\ \Longrightarrow \quad 10(1+\tau_1^2\omega^2) &= \sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \Longrightarrow \quad 100\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)^2 &= \left(1-\frac{\omega^2}{4}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4} \\ \Longrightarrow \quad 100+2\omega^2+\frac{\omega^4}{100} &= 1-\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{16}+\frac{\omega^2}{4} \\ \Longrightarrow \quad 21\omega^4-900\omega^2-39600 &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \omega^2 \simeq 69.85 \text{ rad}^2/\text{sec}^2 &\quad \Longrightarrow \quad \omega = \bar{\omega} \simeq 8.36 \text{ rad/sec.} \end{aligned}$$

Come verifica della validità delle approssimazioni assunte, si determina il contributo dei termini binomi trascurati in corrispondenza della pulsazione  $\bar{\omega}$ :

$$|1+j\tau_2\bar{\omega}|_{\text{dB}} \simeq 3.02 \cdot 10^{-2} \text{ dB}, \quad |1+j\tau_3\bar{\omega}|_{\text{dB}} \simeq 1.21 \cdot 10^{-3} \text{ dB}.$$

Per  $\omega = \bar{\omega}$ , dunque, il valore delle ampiezze in dB è:

$$|W(j\bar{\omega})|_{\text{dB}} = -20 - |1+j\tau_2\bar{\omega}|_{\text{dB}} - |1+j\tau_3\bar{\omega}|_{\text{dB}} \simeq -20.03 \text{ dB},$$

e si commette un errore inferiore allo 0.2%.

- ii) **Analisi qualitativa:** dai diagrammi di Bode delle fasi si nota che uno sfasamento di  $-\pi$  radianti si ottiene per pulsazioni inferiori ai 10rad/sec, per cui, anche in questo caso, è plausibile trascurare i due termini binomi al denominatore.

**Analisi quantitativa:**

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &\simeq \angle \left( \frac{(1-j\tau_1\omega)^2}{1+\frac{2j\zeta\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) = -\pi \\ \Longrightarrow \quad \text{Im} \left[ (1-j\tau_1\omega)^2 \left( 1 - \frac{2j\zeta\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \right] &= 0 \\ \Longrightarrow \quad -(1-\tau_1^2\omega^2) \left( \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right) - 2\tau_1\omega \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{100} \right) - \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{\omega^2}{4} \right) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad -100 + \omega^2 - 40 + 10\omega^2 &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{140}{11} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \omega^* \simeq 3.57 \text{ rad/sec.} \end{aligned}$$

Anche per le fasi, è possibile valutare la bontà delle approssimazioni assunte calcolando i contributi dei termini binomi trascurati nella pulsazione  $\omega^*$ :

$$\angle(1+j\tau_2\omega^*) \simeq 3.57 \cdot 10^{-2} \text{ rad}, \quad \angle(1+j\tau_3\omega^*) \simeq 7.13 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

In corrispondenza di  $\omega^*$ , dunque, la fase vale:

$$\angle W(j\omega^*) = -\pi - \angle(1+j\tau_2\omega^*) - \angle(1+j\tau_3\omega^*) \simeq -3.18 \text{ rad/sec},$$

ossia si ottengono  $-\pi$  radianti a meno di una quantità inferiore a 0.05 rad (meno di 3 gradi).

### 3.5.7 Esempio di diagramma di Bode con termine trinomio non smorzato

Disegnare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1440(2 - 5s)}{(4 + 5s)^2(36 + s^2)}.$$

- i) Calcolare per quale pulsazione si ha un'attenuazione di 40/dec;
- ii) calcolare per quale pulsazione si ha uno sfasamento di  $-\pi$  radianti.

**Svolgimento.** Sono presenti due termini binomi, di cui uno al quadrato, ed un termine trinomio. Posti in forma canonica:

$$\begin{aligned} 2 - 5s &= 2(1 - \tau_1 s), & \tau_1 &= 2.5 \text{ sec}, & \omega_{t_1} &= 0.4 \text{ rad/sec}, \\ (4 + 5s)^2 &= 16(1 + \tau_2 s)^2, & \tau_2 &= 1.25 \text{ sec}, & \omega_{t_2} &= 0.8 \text{ rad/sec}, \\ 36 + s^2 &= 36 \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right), & \zeta &= 0, & \omega_n &= 6 \text{ rad/sec}, \end{aligned}$$

la funzione di trasferimento diventa:

$$W(s) = \frac{K(1 - \tau_1 s)}{(1 + \tau_2 s)^2 \left(1 + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)},$$

con il guadagno di Bode  $K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = 5$ .

**Descrizione dei diagrammi asintotici.** La presenza del termine trinomio non smorzato ( $\zeta = 0$ ) fa sì che il diagramma asintotico delle ampiezze perda validità nell'intorno della pulsazione di risonanza che, in questo caso, coincide con quella naturale  $\omega_n$ . Per le fasi, invece, il termine trinomio non smorzato determina uno sfasamento istantaneo di  $\pi$  in corrispondenza di  $\omega_n$ .

*Ampiezze.* Il guadagno di Bode  $K$  determina il riferimento per l'asse delle ascisse nel diagramma delle ampiezze, ossia il diagramma asintotico è costante e pari a  $|K|_{\text{dB}} \simeq 13.98 \text{ dB}$  fino alla pulsazione di taglio  $\omega_{t_1} = 0.4 \text{ rad/sec}$ , in corrispondenza della quale il diagramma asintotico sale di  $20 \text{ dB/dec}$  fino a incontrare  $\omega_{t_2} = 0.8 \text{ rad/sec}$ . Quindi, la pendenza cambia segno portandosi a  $-20 \text{ dB/dec}$  fino alla pulsazione naturale  $\omega_n = 6 \text{ rad/sec}$ , in corrispondenza della quale diminuisce ulteriormente a  $-60 \text{ dB/dec}$ . È bene notare, però, che il diagramma di Bode presenta un asintoto verticale in corrispondenza della pulsazione naturale  $\omega_n$ , discostandosi, dunque, sensibilmente dal diagramma asintotico in quell'intorno. Riassumendo, le pendenze del diagramma asintotico assumono i valori:

$$\begin{aligned} \omega < 0.4, & & 0 \text{ dB/dec}; \\ 0.4 \leq \omega < 0.8, & & +20 \text{ dB/dec}; \\ 0.8 \leq \omega < 6, & & -20 \text{ dB/dec}, \\ \omega \geq 6 & & -60 \text{ dB/dec}; \end{aligned}$$

*Fasi.* Il guadagno di Bode è positivo e non ci sono termini monomi: il diagramma asintotico delle fasi è uniformemente nullo fino alla pulsazione  $0.04 \text{ rad/sec}$ , una decade prima di quella di taglio  $\omega_{t_1}$ , in corrispondenza della quale il diagramma acquista una pendenza negativa di  $-\frac{\pi}{4} \text{ rad/dec}$  fino a  $0.08 \text{ rad/sec}$ , una decade prima di  $\omega_{t_2}$ . Quindi la pendenza assume il valore di  $-\frac{3}{4}\pi \text{ rad/dec}$  fino

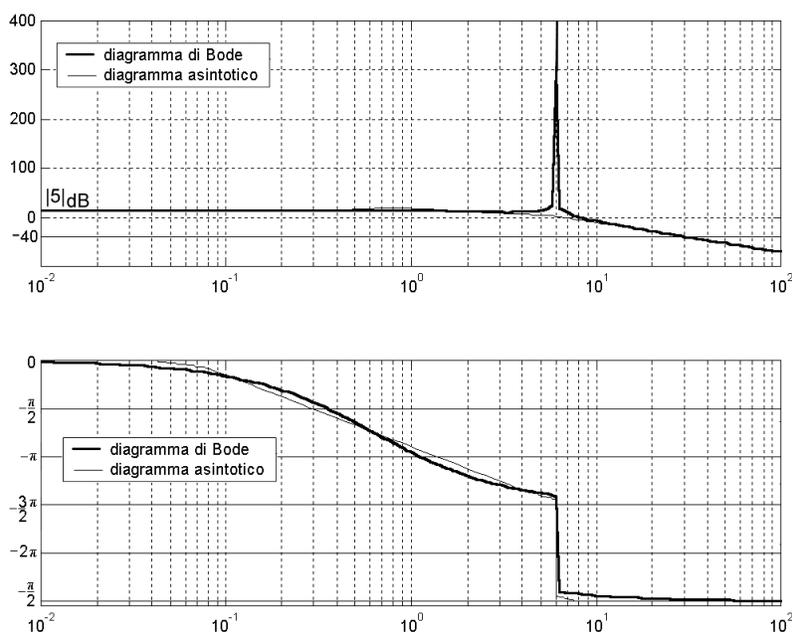


Figura 3.18 - Diagramma di Bode

a 4rad/sec, una decade dopo  $\omega_{t_1}$ , in corrispondenza della quale risale a  $-\frac{\pi}{2}$  rad/dec. Nell'intervallo [4, 8] la pendenza non cambia; la presenza del termine trinomio non smorzato, con pulsazione naturale  $\omega_n = 6$  rad/sec all'interno del suddetto intervallo determina, però, una discontinuità nel diagramma, in ragione di uno sfasamento a gradino di  $-\pi$  radianti in corrispondenza di  $\omega_n$ , ossia la fase in quel punto passa dal valore:

$$\angle W(j6^-) = \angle(1 - j\tau_1 6) - 2\angle(1 + j\tau_2 6) \simeq -4.38\text{rad},$$

al valore:

$$\angle W(j6^+) = \angle W(j6^-) - \pi \simeq -7.52\text{rad} = -1.24\text{rad}.$$

Quindi, per pulsazioni maggiori di 8rad/sec, la fase si assesta al valore di  $-\frac{\pi}{2}$  radianti annullando la sua pendenza. Riassumendo l'andamento delle pendenze:

$\omega < 0.04,$	0rad/dec,
$0.04 \leq \omega < 0.08,$	$-(\pi/4)$ rad/dec,
$0.08 \leq \omega < 4,$	$-(3\pi/4)$ rad/dec,
$4 \leq \omega < 8,$	$-(\pi/2)$ rad/dec,
$\omega \geq 8,$	0rad/dec.

- i) **Analisi qualitativa:** si noti che un'attenuazione di 40dB si ottiene per pulsazioni maggiori di 6rad/sec per cui, in prossimità della pulsazione di attraversamento a  $-40$ dB, tutti i termini

della funzione di trasferimento possono confondersi, con buona approssimazione, con il loro andamento asintotico alle alte frequenze. Dunque:

$$|1 - j\tau_1\omega| \simeq \tau_1\omega, \quad |(1 + j\tau_2\omega)^2| \simeq \tau_2^2\omega^2, \quad \left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right| \simeq \frac{\omega^2}{\omega_n^2}.$$

**Analisi quantitativa:** attenuazione di 40dB significa

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = -40 \Rightarrow 20 \log |W(j\omega)| = -40 \Rightarrow |W(j\omega)| = 10^{-2}.$$

Utilizzando le semplificazioni sopra esposte:

$$|W(j\omega)| \simeq \frac{K\tau_1\omega}{\tau_2^2\omega^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{1}{100} \implies \frac{288}{\omega^3} = \frac{1}{100} \implies \omega = \bar{\omega} \simeq 30.65 \text{ rad/sec.}$$

Volendo controllare quanto si è perso con le semplificazioni:

$$|W(j\bar{\omega})|_{\text{dB}} = |5|_{\text{dB}} + |1 - j\tau_1\bar{\omega}|_{\text{dB}} - 2|1 + j\tau_2\bar{\omega}|_{\text{dB}} - \left|1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_n^2}\right|_{\text{dB}} \simeq -39.67 \text{ dB},$$

ossia si commette un errore inferiore allo 0.9%.

- ii) **Analisi qualitativa:** il diagramma delle fasi attraversa la retta a  $-\pi$  radianti in corrispondenza di una pulsazione  $\omega^* < \omega_n$ , dunque il termine trinomio non contribuisce al calcolo (e questa non è un'approssimazione!). Non sono consigliabili semplificazioni per i termini binomi.

**Analisi quantitativa:**

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &= \angle \left( \frac{1 - j\tau_1\omega}{(1 + j\tau_2\omega)^2} \right) = \angle \left( (1 - j\tau_1\omega)(1 - j\tau_2\omega)^2 \right) = -\pi \\ \implies \text{Im} \left[ (1 - j\tau_1\omega)(1 - j\tau_2\omega)^2 \right] &= 0 \\ \implies -2\tau_2\omega - \tau_1\omega(1 - \tau_2^2\omega^2) &= 0 \\ \implies \tau_1\tau_2^2\omega^2 = \tau_1 + 2\tau_2 &\implies \omega = \omega^* \simeq 1.13 \text{ rad/sec.} \end{aligned}$$

## 4 Punti di equilibrio e Stabilità

Da un punto di vista applicativo non sempre è necessaria la conoscenza analitica o numerica dell'evoluzione dello stato e dell'uscita di un sistema, ma ci si può limitare più semplicemente all'analisi di alcuni aspetti qualitativi riguardanti le soluzioni delle equazioni dinamiche che descrivono in modo implicito le variabili del sistema. La conoscenza dei punti di equilibrio e l'analisi della loro stabilità rientrano nel set di specifiche sopra esposte, e costituiscono il punto di partenza per ogni analisi più approfondita, ovvero per la sintesi di opportune leggi di controllo.

### 4.1 Punti di equilibrio

La ricerca dei punti di equilibrio coinvolge il comportamento in evoluzione libera del sistema, ossia senza ingressi che lo forzano. Definiamo **punto di equilibrio** ogni stato  $x_e \in \mathbb{R}^n$  del sistema per cui

$$x_e = \varphi(t, t_0, x_e, 0|_{[t_0, t)}) \quad \forall t \geq t_0$$

In altri termini, se il sistema parte da quello stato, la sua traiettoria coincide con il punto di equilibrio stesso (non c'è movimento). Nel caso di sistemi a tempo continuo stazionari che siano descritti da una equazione differenziale ordinaria del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

i punti di equilibrio sono i punti che annullano la derivata (il movimento), per cui si cercano come soluzioni del sistema algebrico (non lineare) di equazioni

$$f(x) = 0$$

Nel caso di sistemi a tempo discreto stazionari che siano descritti da una equazione alle differenze del tipo

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

i punti di equilibrio sono i punti che annullano il movimento, per cui si cercano come soluzioni del sistema algebrico (non lineare) di equazioni

$$x = f(x)$$

In entrambi i casi, si possono avere diverse possibilità:

- nessuna soluzione (il sistema non ammette punti di equilibrio);
- una soluzione unica (il sistema ammette un unico punto di equilibrio);
- due soluzioni distinte (il sistema ammette 2 punti di equilibrio);
- un numero finito di soluzioni distinte (il sistema ammette un numero finito di punti di equilibrio);
- infinite soluzioni distribuite in modo continuo (il sistema ammette punti di equilibrio non isolati, che appartengono a una curva o a una superficie (*manifold*) a più dimensioni).

## 4.2 Stabilità

Nelle definizioni che seguono si fa riferimento all'intorno di un punto  $\bar{x}$  di raggio  $\rho > 0$ ,  $I_\rho(\bar{x})$ , come l'insieme dei punti la cui distanza da  $\bar{x}$  è minore di  $\rho$ :

$$I_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \rho\}.$$

Un punto di equilibrio  $x_e$  è **stabile** se, comunque si fissi un intorno di raggio  $\varepsilon$  piccolo a piacere del punto di equilibrio  $I_\varepsilon(x_e)$ , esiste un opportuno intorno di raggio  $\delta$  del punto di equilibrio  $I_\delta(x_e)$ , tale che per ogni stato iniziale  $x_0 \in I_\delta(x_e)$ , l'evoluzione libera dello stato è contenuta in  $I_\varepsilon(x_e)$ , ossia:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) : \quad \|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si parla di **stabilità asintotica** se, oltre alla stabilità, il punto di equilibrio è **attrattivo**, ossia esiste un intorno di raggio  $\eta$  del punto di equilibrio  $I_\eta(x_e)$  tale che, per ogni stato iniziale  $x_0 \in I_\eta(x_e)$ , l'evoluzione libera del sistema converga a  $x_e$ , ossia:

$$\exists \eta > 0 : \quad \|x_0 - x_e\| < \eta \quad \implies \quad \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| \mapsto 0.$$

Per come è definita l'attrattività, solo i punti isolati (ossia sistemi che hanno un numero discreto o finito di punti di equilibrio) possono essere asintoticamente stabili. Infatti, se il punto di equilibrio  $x_e$  appartenesse a una curva di soluzioni, per quanto piccolo si possa scegliere  $I_\varepsilon(x_e)$ , esisterebbe sempre almeno un altro punto di equilibrio distinto in  $I_\varepsilon(x_e)$  e se si partisse da quel punto non si convergerebbe a  $x_e$  (perché non ci si muoverebbe).

Si parla di **stabilità esponenziale** quando la stabilità asintotica implica il ritorno al punto di equilibrio con “velocità esponenziale”, ossia se  $\exists \alpha > 0$  tale che:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) : \quad \|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| < \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Un punto di equilibrio è stabile asintoticamente **globalmente** se

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n : \quad \|x_{\text{lib}}(t) - x_e\| \mapsto 0$$

Altrimenti la stabilità asintotica è solo **locale**. Si noti che la stabilità asintotica di un punto di equilibrio  $x_e$  può essere globale solo se  $x_e$  è l'unico punto di equilibrio del sistema. Altrimenti, ipotizzando che ci sia un altro punto di equilibrio distinto, potrei sempre partire da quel punto e non convergerei a  $x_e$  (perché non mi muoverei).

Nel caso in cui un sistema ammetta un unico punto di equilibrio stabile, parliamo di **punto di lavoro** del sistema; nel caso in cui ci siano 2 o più punti di equilibrio stabili, parliamo di **bi-stabilità** o **multi-stabilità**.

### 4.3 Linearizzazione attorno a un punto di equilibrio stabile asintoticamente

Consideriamo il sistema non lineare stazionario a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

e supponiamo che  $x_e$  sia un suo punto di equilibrio isolato asintoticamente stabile. Definiamo

$$z(t) = x(t) - x_e$$

lo scostamento dello stato dal punto di equilibrio e calcoliamone la dinamica:

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = x_0 - x_e = z_0$$

A questo punto, sviluppiamo  $f(\cdot)$  con Taylor al primo ordine nell'intorno di  $x_e$ :

$$f(x(t)) = f(x_e) + J(x_e)(x(t) - x_e)$$

con

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

la matrice Jacobiana di  $f$ , che racchiude tutte le derivate parziali del primo ordine. Da cui, sostituendo:

$$\dot{z}(t) = f(x_e) + J(x_e)(x(t) - x_e) = J(x_e)z(t), \quad z(0) = z_0$$

dove si è sfruttato il fatto che  $x_e$  è un punto di equilibrio, per cui  $f(x_e) = 0$ . Riassumendo, considerando lo sviluppo di Taylor al primo ordine rispetto al punto di equilibrio si ottiene il sistema lineare:

$$\dot{z}(t) = J(x_e)z(t), \quad z(0) = z_0$$

Il fatto che il punto di equilibrio sia asintoticamente stabile garantisce che gli scostamenti dal punto di equilibrio siano limitati e convergenti a zero, il che implica che

$$x(t) \mapsto x_e \quad \implies \quad z(t) \mapsto 0$$

La scelta del punto di equilibrio asintoticamente stabile garantisce la bontà dell'approssimazione al primo ordine di Taylor (che è tanto più buona quanto più piccoli sono gli scostamenti dal punto di sviluppo di Taylor). Tale scelta implica anche che tutti gli autovalori dello Jacobiano  $J(x_e)$  abbiano parte reale minore di zero, che è la condizione necessaria e sufficiente per garantire che l'evoluzione libera del sistema linearizzato vada a zero. Questo fatto garantisce che  $z = 0$  sia l'unico punto di equilibrio del sistema linearizzato dato che, per il Teorema di Rouché-Capelli, si avrebbero infinite soluzioni per  $J(x_e)x = 0$  (e, quindi, infiniti punti di equilibrio) se la matrice Jacobiana avesse un autovalore nell'origine.

**Proposizione 3.1** - La matrice Jacobiana può essere utilizzata come strumento per valutare la stabilità asintotica o la instabilità del punto di equilibrio come segue:

- se tutti gli autovalori di  $J(x_e)$  sono asintoticamente stabili (ossia a parte reale minore di zero), allora il punto di equilibrio è localmente asintoticamente stabile;
- se esiste almeno un autovalore di  $J(x_e)$  instabile (ossia a parte reale maggiore di zero), allora il punto di equilibrio è instabile;
- se non ci sono autovalori di  $J(x_e)$  instabili, e c'è almeno un autovalore semplicemente stabile (a parte reale nulla), allora non possiamo dire nulla sulla stabilità del punto di equilibrio.

#### 4.4 Punti di equilibrio per sistemi lineari stazionari

Consideriamo un sistema lineare stazionario a tempo continuo. Per definizione, i punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema algebrico lineare di equazioni

$$Ax = 0$$

ossia i punti di equilibrio sono il *nullo* della matrice  $A$ :

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

Dal Teorema di Rouché-Capelli segue l'importante proprietà che esiste un unico punto di equilibrio se, e solo se, la matrice  $A$  ha rango pieno ossia se, e solo se, il suo determinante è diverso da zero, ossia se, e solo se, non esistono autovalori nulli per  $A$ . E, in tal caso, l'unico punto di equilibrio è l'origine. In caso contrario, l'insieme dei punti di equilibrio sarà infinito, e costituito dallo spazio delle soluzioni di  $Ax = 0$  (non esistono punti di equilibrio isolati). L'origine, in ogni caso, è sempre un punto di equilibrio.

Nel caso di sistemi lineari stazionari a tempo discreto, per definizione, i punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$(I - A)x = 0$$

Per cui, *mutatis mutandis*, si ripetono le stesse considerazioni svolte per il caso a tempo continuo: esiste un unico punto di equilibrio se, e solo se, la matrice  $I - A$  ha rango pieno ossia se, e solo se, non esistono autovalori nulli per  $I - A$  ossia se, e solo se, non esistono autovalori in modulo pari a 1 per  $A$ . E, in tal caso, l'unico punto di equilibrio è l'origine. In caso contrario, l'insieme dei punti di equilibrio sarà infinito, e costituito dallo spazio delle soluzioni di  $(I - A)x = 0$  (non esistono punti di equilibrio isolati). L'origine, in ogni caso, è sempre un punto di equilibrio.

#### 4.5 Stabilità per sistemi lineari stazionari a tempo continuo: il criterio di Routh

Da quanto esposto è facile intuire che l'analisi della stabilità per un sistema lineare stazionario si riduce al problema numerico del calcolo degli zeri del polinomio caratteristico (autovalori della matrice  $A$ ) per la stabilità interna. In realtà, ciò che è richiesto non è tanto la conoscenza esatta (o approssimata) degli autovalori/poli di cui sopra, quanto la loro appartenenza ad opportuni domini del piano complesso: il semipiano reale negativo per i sistemi a tempo continuo oppure il cerchio unitario per i sistemi a tempo discreto. Di seguito valuteremo un criterio che risponda al primo quesito, ossia se tutti gli zeri di un polinomio sono a parte reale negativa. Inoltre, tale criterio risponderà anche a quesiti più complessi: talvolta si è interessati a garantire una dinamica particolarmente veloce, e si considera il semipiano a parte reale minore di un opportuno coefficiente negativo; oppure si è preoccupati delle oscillazioni prodotte dalle coppie di poli complessi coniugati, e si considera un dominio del semipiano reale negativo, che limiti opportunamente il coefficiente di smorzamento delle coppie complesse coniugate. Per rispondere a tutti questi quesiti, si introduce il seguente criterio che riguarda l'analisi del segno delle radici di un polinomio.

**Criterio di Routh** – *Sia*

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0,$$

un polinomio di grado  $n$  ( $\alpha_n \neq 0$ ). Si costruisca la tabella:

$n$	$a_n^0$	$a_{n-2}^0$	$a_{n-4}^0$	$a_{n-6}^0$	$\dots$
$n-1$	$a_{n-1}^1$	$a_{n-3}^1$	$a_{n-5}^1$	$a_{n-7}^1$	$\dots$
$n-2$	$a_{n-2}^2$	$a_{n-4}^2$	$a_{n-6}^2$	$\dots$	
$n-3$	$a_{n-3}^3$	$a_{n-5}^3$	$a_{n-7}^3$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$3$	$a_3^{n-3}$	$a_1^{n-3}$			
$2$	$a_2^{n-2}$	$a_0^{n-2}$			
$1$	$a_1^{n-1}$				
$0$	$a_0^n$				

nel seguente modo:

$$\text{i) } a_i^0 = \alpha_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i = n, n-2, n-4, \dots;$$

$$\text{ii) } a_i^1 = \alpha_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i = n-1, n-3, n-5, \dots;$$

$$\text{iii) } a_i^j = -\frac{b_i^j}{a_{n+1-j}^{j-1}}, \quad b_i^j = \begin{vmatrix} a_{n+2-j}^{j-2} & a_i^{j-2} \\ a_{n+1-j}^{j-1} & a_{i-1}^{j-1} \end{vmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i = n-j, n-j-2, \dots.$$

Se è possibile completare la tabella (ossia se gli elementi della prima colonna sono tutti non nulli), si può escludere che vi siano radici a parte reale nulla per il polinomio. Quindi, si considera il segno degli elementi della prima colonna. Il numero delle **variazioni** di segno tra elementi adiacenti determina il numero di radici a parte reale positiva del polinomio.

$$\begin{array}{c} a_n^0 \\ a_{n-1}^1 \\ a_{n-2}^2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \\ a_0^n \end{array}$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio caratteristico, è possibile, dunque, discutere la stabilità del sistema lineare.

A riguardo di tale criterio, inoltre, è possibile dimostrare le seguenti proposizioni:

- condizione necessaria affinché il sistema sia asintoticamente stabile (tutti gli elementi in prima colonna non nulli e concordi di segno) è che tutti i coefficienti del polinomio siano concordi di segno;
- nella costruzione della tabella è possibile (per semplificare i conti) moltiplicare tutti gli elementi di una colonna per uno stesso coefficiente positivo.

**Esempio.** Applichiamo il Criterio di Routh al polinomio

$$d(\lambda) = \lambda^8 - \lambda^7 + \lambda^5 - \lambda^2 + 1.$$

La tabella di Routh associata al polinomio  $d(\lambda)$  è la seguente:

$$\begin{array}{r|cccc} 8 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 0 & 0 & \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 1 & \\ 5 & 1 & -1 & 1 & & \\ 4 & 1 & -2 & 1 & & \\ 3 & 1 & 0 & & & \\ 2 & -2 & 1 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & 1 & & & & \end{array}$$

Si può applicare il criterio di Routh, poiché la tabella può scriversi completamente, infatti non presenta zeri in prima colonna, che (trasposta) è pari a:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ & V & & V & & P & & P & & V & & V & & \frac{1}{2} & & P & & 1 \end{array}$$

Vi sono 4 variazioni in prima colonna, per cui il polinomio caratteristico ha 4 radici a parte reale positiva e 4 radici a parte reale negativa: il sistema è instabile.

#### 4.5.1 Il caso di uno zero in prima colonna nella tabella di Routh

Nel caso in cui, nella realizzazione della tabella, ci si imbatte in un elemento nullo in prima colonna, chiaramente la tabella, così come è stata definita, non può completarsi. Si supponga che non tutti gli elementi della riga con lo zero in prima posizione siano nulli. In questi casi, si può procedere in due modi alternativi:

- si sostituisce al posto dell'elemento nullo la quantità infinitesima  $\varepsilon > 0$ . Si completa la tabella in funzione del parametro  $\varepsilon$  e si traggono le opportune conclusioni a tabella ultimata, come descritto dal criterio di Routh; questo approccio porta agli stessi risultati anche supponendo  $\varepsilon < 0$ , ossia il numero delle variazioni in prima colonna è invariante rispetto al segno di  $\varepsilon$ ;
- si moltiplica il polinomio di partenza per un secondo polinomio, le cui radici siano non nulle e note, almeno nel segno (è preferibile, inoltre, che il grado sia piccolo, per non appesantire i conti); dopo aver calcolato i coefficienti del polinomio prodotto, se ne scrive la tabella di Routh e si traggono le opportune conclusioni, analizzando permanenze e variazioni in prima colonna. Ovviamente, dalle radici del polinomio prodotto devono essere escluse quelle fittizie del secondo polinomio. Le controindicazioni a questo approccio (euristico) sono che, se pur improbabile, non vi è certezza che non si ripresenti uno zero in prima colonna nella costruzione della nuova tabella.

**Esempio.** Applichiamo il Criterio di Routh al polinomio

$$d(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2.$$

La costruzione della tabella di Routh associata al polinomio  $d(s)$  si interrompe in corrispondenza della riga 3:

$$\begin{array}{r|ccc} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & \end{array}$$

Poiché la riga 3 non è tutta nulla, è possibile completare la tabella sostituendo allo zero in prima posizione la quantità infinitesima  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{array}{r|ccc} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & \varepsilon & -1 & \\ 2 & \frac{1}{\varepsilon} & 2 & \\ 1 & -1 & & \\ 0 & 2 & & \end{array}$$

Si noti che nella realizzazione della tabella si è tenuto conto che la quantità  $\varepsilon$  è infinitesima, per cui:

$$a_2^3 = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad a_1^4 = -1 - 2\varepsilon^2 = -1.$$

Riscrivendo, trasposta, la prima colonna:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} & -1 & 2 \\ & P & P & P & V & V \end{array}$$

si ottengono 2 variazioni e 3 permanenze, per cui vi sono 2 radici a parte reale positiva e 3 a parte reale negativa: il sistema è instabile, perché le due radici a parte reale positiva corrispondono ad una coppia di modi instabili. Se si fosse scelto il parametro  $\varepsilon < 0$ , il risultato non sarebbe cambiato, come è giusto che sia:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} & -1 & 2 \\ & P & V & P & P & V \end{array}$$

Si ottengono sempre 2 variazioni e 3 permanenze.

Il medesimo risultato può essere raggiunto anche in altro modo, moltiplicando il polinomio  $d(\lambda)$  per il polinomio fittizio  $\lambda + 1$ :

$$\tilde{d}(\lambda) = d(\lambda)(\lambda + 1) = \lambda^6 + 2\lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2,$$

e, quindi, se ne costruisce la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & \\ 3 & & & & \\ 2 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & \\ 4 & 2 & 1 & 4 & \\ 3 & 1 & -1 & & \\ 2 & 3 & 4 & & \\ 1 & -\frac{7}{3} & & & \\ 0 & 4 & & & \end{array}$$

Dal calcolo delle variazioni e delle permanenze in prima colonna:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & -\frac{7}{3} & 4 \\ & P & P & P & P & V & V \end{array}$$

vi sono 2 variazioni e 4 permanenze, da cui 2 radici a parte reale positiva e 4 radici a parte reale negativa; di queste 4, però, una non va considerata, perché radice del polinomio  $\lambda + 1$ , cosicché si ottiene lo stesso numero di variazioni precedentemente determinato.

#### 4.5.2 Il caso di una riga tutta nulla nella tabella di Routh

Se costruendo la tabella di Routh, tutti gli elementi di una riga sono nulli, si utilizza il seguente algoritmo:

- i) la riga tutta nulla è necessariamente una riga dispari e il polinomio  $p(\lambda)$  si fattorizza nel prodotto  $p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ , con i polinomi  $p_1(\lambda)$  e  $p_2(\lambda)$  descritti nei punti successivi;

- ii) l'analisi riguardante la parte reale delle radici di  $p_1(\lambda)$  si effettua applicando il criterio di Routh alla prima colonna della tabella incompleta: tante radici a parte reale positiva quante sono le variazioni e tante radici a parte reale negativa quante sono le permanenze;
- iii) il polinomio  $p_2(\lambda)$  si scrive utilizzando i coefficienti della riga immediatamente precedente la riga tutta nulla, ed è un polinomio di sole potenze pari; ad esempio, supponendo di avere la seguente situazione nella tabella:

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & a_6^{n-6} & a_4^{n-6} & a_2^{n-6} & a_0^{n-6} \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

si scrive il polinomio

$$p_2(\lambda) = a_6^{n-6}\lambda^6 + a_4^{n-6}\lambda^4 + a_2^{n-6}\lambda^2 + a_0^{n-6};$$

- iv) si calcola la derivata  $\frac{dp_2}{d\lambda} = \tilde{p}(\lambda)$ ;
- v) si sostituisce nella tabella di Routh la riga tutta nulla con i coefficienti del polinomio  $\tilde{p}(\lambda)$ ;
- vi) si completa la tabella e si considerano le variazioni di segno degli elementi in prima colonna, relativamente alla seconda parte della tabella;
- vii) ad ogni variazione corrisponde una coppia di radici di segno opposto e a parte reale non nulla, quindi una a parte reale positiva ed una a parte reale negativa;
- viii) se il numero delle radici di  $p_1(\lambda)$  e di  $p_2(\lambda)$  non raggiunge  $n$ , le restanti radici del polinomio sono a parte reale nulla.

**Esempio.** Applichiamo il Criterio di Routh al polinomio

$$d(\lambda) = \lambda^7 + 3\lambda^6 + 2\lambda^5 + 6\lambda^4 + 5\lambda^3 + 15\lambda^2 + 4\lambda + 12.$$

La costruzione della tabella di Routh associata al polinomio  $d(\lambda)$  si interrompe in corrispondenza della riga 5:

$$\begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 6 & 15 & 12 \\ 5 & & & & \end{array} \implies \begin{array}{c|cccc} 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

La presenza di una riga a coefficienti tutti nulli impedisce il completamento della tabella. Applicando il criterio di Routh alla tabella incompleta, si ottiene una permanenza, che corrisponde ad una radice a parte reale negativa. Quindi si scrive il polinomio a potenze pari, i cui coefficienti sono dati dalla riga 6 e se ne calcola la derivata:

$$d_2(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 \implies d_2'(\lambda) = 6\lambda^5 + 8\lambda^3 + 10\lambda.$$

Si sostituiscono alla riga 5 (tutta nulla) i coefficienti del polinomio  $d'_2(s)$ , completando la tabella:

$$\begin{array}{c|cccc}
 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\
 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\
 5 & 3 & 4 & 5 & \\
 4 & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} & 4 & \\
 3 & & & & \\
 2 & & & & \\
 1 & & & & \\
 0 & & & & 
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{c|cccc}
 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\
 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\
 5 & 3 & 4 & 5 & \\
 4 & 1 & 5 & 6 & \\
 3 & -11 & -13 & & \\
 2 & \frac{42}{11} & 6 & & \\
 1 & & & & \\
 0 & & & & 
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{c|cccc}
 7 & 1 & 2 & 5 & 4 \\
 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\
 5 & 3 & 4 & 5 & \\
 4 & 1 & 5 & 6 & \\
 3 & -11 & -13 & & \\
 2 & 7 & 11 & & \\
 1 & \frac{30}{7} & & & \\
 0 & 11 & & & 
 \end{array}$$

e si calcolano variazioni e permanenze in prima colonna, a partire dalla riga 5:

$$\begin{array}{cccccc}
 3 & 1 & -11 & 7 & \frac{30}{7} & 11 \\
 P & V & V & P & P & P
 \end{array}$$

Le 2 variazioni indicano che vi sono 2 radici a parte reale positiva e 2 a parte reale negativa; complessivamente vi sono, dunque, 3 radici a parte reale negativa e 2 a parte reale positiva. Le restanti 2 radici sono a parte reale nulla. Il sistema è instabile.

### 4.5.3 Scelta della regione per le radici

Come precedentemente accennato, un'altra opportunità che fornisce il criterio di Routh consiste nel verificare l'appartenenza delle radici di un polinomio a particolari regioni del piano. Si supponga, ad esempio, di essere interessati a radici che abbiano la parte reale minore di un coefficiente negativo fissato; questa condizione è importante qualora, oltre alla stabilità asintotica, si vogliano dare specifiche anche sulla velocità di convergenza: più a sinistra del semipiano reale negativo si trovano le radici del polinomio caratteristico e più veloce è la convergenza a zero per l'evoluzione libera del sistema. Siano, dunque,  $D$  la regione indicata in Figura 4.1, delimitata dalla retta di ascissa  $-a$ , con  $a \in \mathbb{R}^+$ , e  $p(\lambda)$  il polinomio, le cui radici si desidera che appartengano al dominio  $D$ .

Se con  $\lambda_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$  si indicano le radici del polinomio  $p(\lambda)$ , allora  $\lambda_i^* + a$ ,  $i = 1, \dots, n$  sono le radici del polinomio  $\tilde{p}(\lambda) = p(\lambda - a)$ . Infatti:

$$\tilde{p}(\lambda_i^* + a) = p(\lambda_i^* + a - a) = p(\lambda_i^*) = 0.$$

Dunque, applicare il criterio di Routh al polinomio  $\tilde{p}(\lambda)$ , ossia vedere quante radici di  $\tilde{p}(\lambda)$  sono a parte reale negativa, equivale a conoscere il numero di radici del polinomio  $p(\lambda)$  che appartengono a  $D$ :

$$\operatorname{Re}[\lambda_i^* + a] < 0 \implies \operatorname{Re}[\lambda_i^*] < -a.$$

**Esempio.** Calcolare per quali valori del parametro reale  $k$  le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale minore di  $-\frac{1}{3}$ .

$$d(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo il polinomio  $\tilde{d}(\lambda) = d(\lambda - \frac{1}{3})$ :

$$\tilde{d}(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) + k = \lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + k - \frac{2}{9},$$

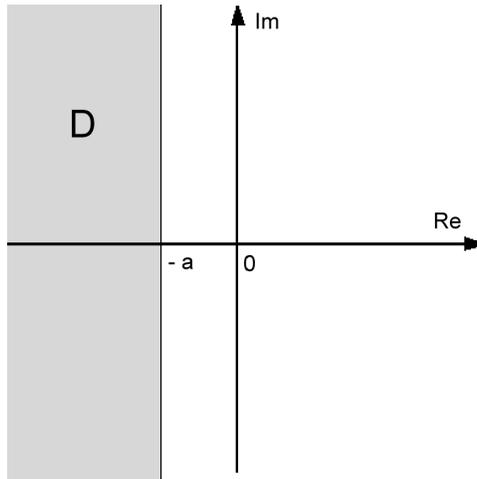


Figura 4.1 - Regione del piano complesso a parte reale minore di  $-a$

la cui tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & k - \frac{2}{9} \\ 1 & \frac{1}{3} & \\ 0 & k - \frac{2}{9} & \end{array}$$

Affinché tutti i poli della funzione di trasferimento siano a parte reale minore di  $-\frac{1}{3}$  non devono esserci variazioni nella tabella, per cui deve essere

$$k - \frac{2}{9} > 0 \quad \implies \quad k > \frac{2}{9}.$$

Un'altra specifica da soddisfare consiste nel limitare le “caratteristiche complesse” delle radici del polinomio analizzato: se, ad esempio, si tratta del polinomio caratteristico, la presenza di una coppia di autovalori complessi coniugati ( $\lambda_{1/2} = -\alpha \pm j\omega$ , con  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}^+$ ) determina la presenza di modi pseudoperiodici e, quindi, di oscillazioni di pulsazione pari al modulo della parte immaginaria degli autovalori; pur se la coppia è stabile asintoticamente l'innesco di oscillazioni dà luogo a frizioni indesiderate tra le parti del sistema, tanto più dannose quanto maggiore è la loro frequenza: è perciò preferibile che le (eventuali) coppie di modi complessi coniugati siano associate ad autovalori con  $\omega$  molto bassa. Se tali modi sono osservabili in uscita ed eccitabili per impulsi in ingresso, la funzione di trasferimento  $W(s)$  ha al denominatore il fattore

$$(s + \alpha - j\omega)(s + \alpha + j\omega) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2 = |z|^2 \left( 1 + \frac{2\alpha s}{|z|^2} + \frac{s^2}{|z|^2} \right),$$

con  $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$  il modulo degli autovalori. In questo caso, dunque, la presenza di una parte immaginaria dominante ( $\omega \gg \alpha$ ) implica uno smorzamento  $\zeta = \frac{\alpha}{|z|}$  molto basso, il che produce indesiderati effetti di risonanza in prossimità della pulsazione  $\omega_n = |z|$ . Posto  $\bar{\zeta}$  lo smorzamento limite ammissibile, è individuato l'angolo  $\bar{\varphi} = \arcsin \bar{\zeta}$  che delimita la regione  $D$  in Figura 3.2 delle coppie di punti complessi coniugati stabili ( $\text{Re}[z] < 0$ ) e con smorzamento  $\zeta > \bar{\zeta}$ . Sia, dunque,  $p(\lambda)$

il polinomio le cui radici si richiede che appartengano al dominio  $D$  di Figura 3.2. Fissato l'angolo  $\bar{\varphi}$ , si consideri il seguente polinomio:

$$\tilde{p}(\lambda) = p(\lambda e^{j\bar{\varphi}})p(\lambda e^{-j\bar{\varphi}}).$$

Per costruzione esso è a coefficienti reali e, inoltre, se  $\lambda_i^*$  è una radice di  $p(\lambda)$ , allora  $\lambda_i^* e^{\pm j\bar{\varphi}}$  sono radici di  $\tilde{p}(\lambda)$ . Infatti:

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\lambda_i^* e^{j\bar{\varphi}}) &= p(\lambda_i^* e^{j\bar{\varphi}} e^{j\bar{\varphi}})p(\lambda_i^* e^{j\bar{\varphi}} e^{-j\bar{\varphi}}) = p(\lambda_i^* e^{2j\bar{\varphi}})p(\lambda_i^*) = 0, \\ \tilde{p}(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}}) &= p(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}} e^{j\bar{\varphi}})p(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}} e^{-j\bar{\varphi}}) = p(\lambda_i^*)p(\lambda_i^* e^{-2j\bar{\varphi}}) = 0.\end{aligned}$$

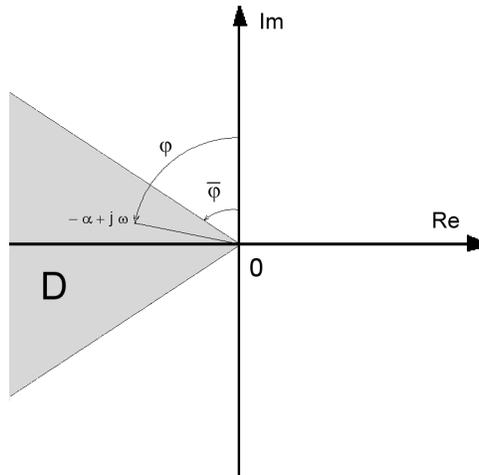


Figura 3.2 - Radici complesse con smorzamento maggiore di  $\bar{\zeta} = \sin \bar{\varphi}$

Allora, applicare il criterio di Routh al polinomio  $\tilde{p}(\lambda)$  equivale a stabilire se le radici di  $p(\lambda)$  appartengono a  $D$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\lambda_i^* e^{-j\bar{\varphi}}) < 0 &\Rightarrow \operatorname{Re}[-(\alpha + j\omega)e^{-j\bar{\varphi}}] < 0 \\ \Rightarrow -\alpha \cos \bar{\varphi} + \omega \sin \bar{\varphi} < 0 &\Rightarrow \tan \varphi > \tan \bar{\varphi} \Rightarrow \varphi > \bar{\varphi},\end{aligned}$$

Se le specifiche di controllo prevedono una limitazione sia sulla parte reale delle radici, sia sullo smorzamento di eventuali coppie complesse coniugate, ossia si richiede l'appartenenza ad un dominio del tipo descritto in Figura 3.3, è possibile applicare entrambi i procedimenti precedentemente descritti.

**Esempio.** Stabilire se le radici del polinomio

$$d(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6$$

sono tutte a parte reale  $< -1$  e con smorzamento maggiore di  $\frac{1}{2}$ .

In accordo con le specifiche dell'esercizio si impone l'appartenenza delle radici ad una regione del piano complesso del tipo in Figura 3.3, con:

$$a = 1, \quad \bar{\varphi} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

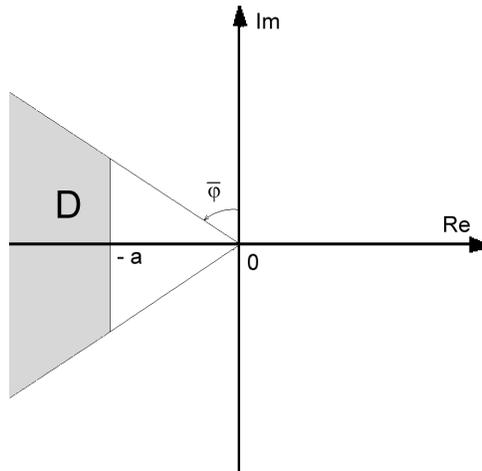


Figura 3.3 - Dominio che limita parte reale e smorzamento delle radici

Per verificare la condizione sulla parte reale delle radici, si costruisce la tabella di Routh per il polinomio:

$$\tilde{d}(\lambda) = d(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^3 + 5(\lambda - 1)^2 + 9(\lambda - 1) + 6 = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

Ci sono 3 permanenze, dunque tutte le radici del polinomio hanno parte reale minore di  $-1$ . Per controllare la condizione sullo smorzamento, si scrive il polinomio

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\lambda) &= d(\lambda e^{j\frac{\pi}{6}}) d(\lambda e^{-j\frac{\pi}{6}}) = (\lambda^3 e^{j\frac{\pi}{2}} + 5\lambda^2 e^{j\frac{\pi}{3}} + 9\lambda e^{j\frac{\pi}{6}} + 6) (\lambda^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} + 5\lambda^2 e^{-j\frac{\pi}{3}} + 9\lambda e^{-j\frac{\pi}{6}} + 6) \\ &= \lambda^6 + 10\lambda^5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 18\lambda^4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 25\lambda^4 + 12\lambda^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 90\lambda^3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 60\lambda^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 81\lambda^2 + 108\lambda \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 36 \\ &= \lambda^6 + 5\sqrt{3}\lambda^5 + 34\lambda^4 + 45\sqrt{3}\lambda^3 + 111\lambda^2 + 54\sqrt{3}\lambda + 36, \end{aligned}$$

e se ne costruisce la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cccc}
 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\
 5 & 5\sqrt{3} & 45\sqrt{3} & 54\sqrt{3} & \\
 4 & & & & \\
 3 & & & & \\
 2 & & & & \\
 1 & & & & \\
 0 & & & & 
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccc}
 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\
 5 & 5 & 45 & 54 & \\
 4 & 25 & \frac{501}{5} & 36 & \\
 3 & \frac{624}{25} & \frac{1170}{25} & & \\
 2 & & & & \\
 1 & & & & \\
 0 & & & & 
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|cccc}
 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\
 5 & 5 & 45 & 54 & \\
 4 & 25 & \frac{501}{5} & 36 & \\
 3 & 8 & 15 & & \\
 2 & \frac{2133}{40} & 36 & & \\
 1 & & & & \\
 0 & & & & 
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccc}
 6 & 1 & 34 & 111 & 36 \\
 5 & 5 & 45 & 54 & \\
 4 & 25 & \frac{501}{5} & 36 & \\
 3 & 8 & 15 & & \\
 2 & 237 & 160 & & \\
 1 & \frac{2275}{237} & & & \\
 0 & 160 & & & 
 \end{array}$$

Dall'analisi delle variazioni:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 5 & 25 & 8 & 237 & \frac{2275}{237} & 160 \\
 & P & P & P & P & P & P
 \end{array}$$

tutte le radici cadono all'interno della regione desiderata.

## 5 Stabilità per sistemi lineari stazionari a retroazione a tempo continuo

Lo schema generico di un sistema di controllo a **controreazione** (o a **feedback**) per un sistema lineare stazionario a tempo continuo è quello descritto in Figura 5.1.

I 3 *blocchi* individuano i 3 sistemi dinamici costituenti il sistema di regolazione a ciclo chiuso, individuati dalla loro funzione di trasferimento.  $F(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema *fisico* da controllare.  $y(t)$  è l'uscita misurata che entra in feedback nel sistema di controllo; tale segnale potrebbe avere necessità di essere trasdotto: il controllore, che sia analogico o digitale, ha bisogno di un segnale elettrico, mentre l'uscita misurata potrebbe essere un angolo, una posizione, una velocità, ecc, per cui entra nel controllore attraverso un sistema di misurazione/trasduzione eventualmente dinamico, la cui funzione di trasferimento è  $H(s)$ .  $v(t)$  è il segnale d'ingresso al controllore, generalmente un segnale di riferimento che viene confrontato con il segnale di uscita trasdotto: dunque, in ingresso al controllore entra la differenza tra l'ingresso desiderato e quello misurato, ossia l'errore. Il controllore è qui rappresentato dalla funzione di trasferimento  $C(s)$ , per cui lo si suppone analogico (a tempo continuo); nel caso in cui, invece, fosse un controllore digitale, i segnali a tempo continuo dovranno essere preventivamente campionati e, di contro, il segnale in uscita al controllore dovrà essere attuato attraverso un dispositivo che trasformi un segnale di controllo in un'azione elettrica o meccanica (o di qualunque altra natura necessaria per realizzare l'azione di controllo).

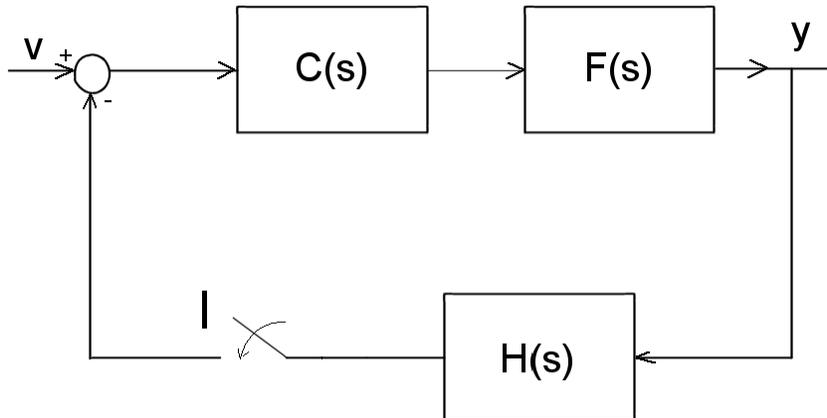


Figura 5.1 - Schema di controllo a controreazione

Si parla di *catena aperta* o *sistema a ciclo aperto* quando si suppone che l'interruttore  $I$  sia aperto, cosicché la funzione di trasferimento che esprime la relazione tra l'ingresso di riferimento e l'uscita misurata è:

$$W_{AP}(s) = F(s)C(s)$$

E' bene notare che, nel caso generico di sistemi a più ingressi e più uscite, le funzioni di trasferimento sono matrici, per cui il prodotto è *non* commutativo. Si parla di *catena chiusa* o *sistema a ciclo chiuso* quando l'interruttore è chiuso, per cui la funzione di trasferimento tra l'ingresso di riferimento e l'uscita misurata è:

$$W_{CH}(s) = (I_q + F(s)C(s)H(s))^{-1}F(s)C(s) = (I_q + W_{AP}(s)H(s))^{-1}W_{AP}(s)$$

## 5.1 Feedback a retroazione unitaria

Una delle specifiche più importanti per un sistema di controllo è che il sistema a ciclo chiuso sia stabile, possibilmente asintoticamente. A tale scopo è utile notare che la stabilità di un generico sistema a controreazione descritto dalla Figura 5.2 (sinistra) è equivalente alla stabilità del sistema ad **anello unitario**, in cui il sistema di trasduzione è riportato in anello aperto, vedi Figura 5.2 (destra). Ovviamente, tale schema vale ipotizzando che l'ingresso di riferimento  $v(t)$  e l'uscita misurata  $y(t)$  abbiano le stesse dimensioni, ossia  $p = q$ .

Tale asserzione è facile da verificare nel dominio del tempo. Infatti, supponiamo che il sistema descritto dalla funzione di trasferimento  $W(s)$  sia individuato dalle matrici dinamiche  $(A, B, C)$  senza legame diretto, e che il sistema di trasduzione descritto dalla funzione di trasferimento  $H(s)$  sia individuato dalle matrici dinamiche  $(F, G, P, E)$ . Allora, le equazioni dinamiche per i due sistemi, relativamente allo schema della Figura 5.2 a sinistra è:

$$\mathcal{S}_W = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(v(t) - y_H(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \mathcal{S}_H = \begin{cases} \dot{\zeta}(t) = F\zeta(t) + Gy(t) \\ y_H(t) = P\zeta(t) + Ey(t) \end{cases}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^m$  gli stati del sistema da controllare e del trasduttore, rispettivamente, e

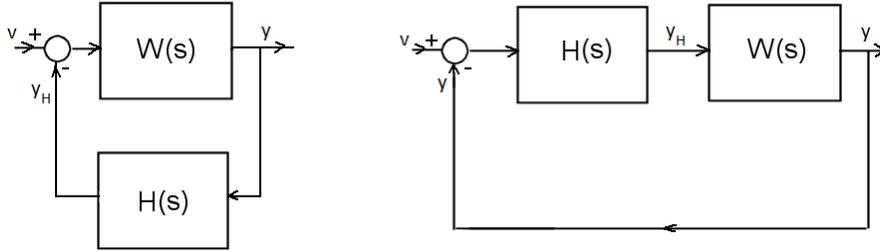


Figura 5.2 - Sistema a controreazione

$y_H(t)$  il segnale in uscita al trasduttore. Da cui, a ciclo chiuso, abbiamo

$$\mathcal{S}_{CH} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BEC)x(t) - BP\zeta(t) + Bv(t) \\ \dot{\zeta}(t) = GCx(t) + F\zeta(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

la cui matrice dinamica a blocchi è:

$$A_{CH} = \begin{bmatrix} A - BEC & -BP \\ GC & F \end{bmatrix}$$

Se ripetiamo lo stesso ragionamento per il sistema a controreazione unitaria descritto in Figura 5.2 a destra, abbiamo

$$\mathcal{S}_W = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + By_H(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \mathcal{S}_H = \begin{cases} \dot{\zeta}(t) = F\zeta(t) + G(v(t) - y(t)) \\ y_H(t) = P\zeta(t) + E(v(t) - y(t)) \end{cases}$$

da cui, a ciclo chiuso, abbiamo

$$\mathcal{S}'_{CH} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BEC)x(t) + BP\zeta(t) + BEv(t) \\ \dot{\zeta}(t) = -GCx(t) + F\zeta(t) + Gv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

la cui matrice dinamica a blocchi è:

$$A'_{CH} = \begin{bmatrix} A - BEC & BP \\ -GC & F \end{bmatrix}$$

Si dimostra che gli autovalori delle due matrici  $A_{CH}$  e  $A'_{CH}$  sono gli stessi (è facile verificarlo per il caso scalare  $n = m = 1$ ), per cui lo studio della stabilità dei due sistemi descritti nei due schemi di Figura 5.2 è equivalente. Per questo motivo, senza perdita di generalità, potremo studiare la stabilità di sistemi a controreazione unitaria riportando il modulo di trasduzione in catena aperta. Lo schema di riferimento per questi sistemi è quello di Figura 5.3, in cui il sistema di trasduzione  $H(s)$  è inglobato nella risposta in catena aperta.

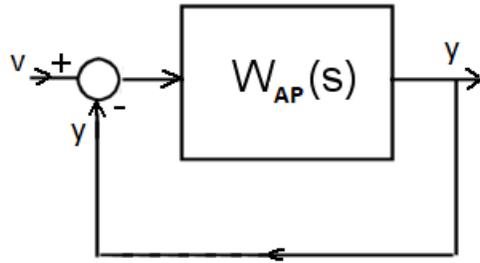


Figura 5.3 - Sistema a controreazione unitaria

## 5.2 Stabilità dei sistemi a controreazione unitaria: il Criterio di Nyquist per sistemi Single Input Single Output (SISO)

Le equazioni differenziali che descrivono i sistemi a ciclo aperto e a ciclo chiuso del sistema a controreazione unitaria del tipo in Figura 5.3 sono:

$$\mathcal{S}_{AP} = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(v(t) - y(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \implies \mathcal{S}_{CH} = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BC)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Per cui, il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso diventa, applicando il Teorema di Binet sul determinante di un prodotto di matrici:

$$\begin{aligned} d_{CH}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A + BC) = \det\left((\lambda I_n - A)(I_n + (\lambda I_n - A)^{-1}BC)\right) \\ &= \det(\lambda I_n - A) \cdot \det(I_n + (\lambda I_n - A)^{-1}BC) = d_{AP}(\lambda) \cdot \det(I_n + (\lambda I_n - A)^{-1}BC) \end{aligned}$$

Applicando la seguente proprietà dei determinanti:

$$\det(I_m + QP) = \det(I_m + PQ), \quad P \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

si ricava la formula che lega i polinomi caratteristici a ciclo aperto e a ciclo chiuso alla funzione di trasferimento a ciclo aperto

$$\frac{d_{CH}(\lambda)}{d_{AP}(\lambda)} = \det(I_q + C(\lambda I_n - A)^{-1}B) = \det(I_q + W_{AP}(\lambda))$$

Nel caso semplificativo di sistemi a un solo ingresso e una sola uscita (*Single Input, Single Output, SISO*), la formula precedente si semplifica in

$$\frac{d_{CH}(\lambda)}{d_{AP}(\lambda)} = 1 + W_{AP}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Valutiamo cosa accade alle singole parti della formula quando considero  $\lambda = j\omega$  e faccio variare  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$  (ossia mi sto muovendo lungo l'asse immaginario del piano complesso). I polinomi caratteristici sono, appunto, polinomi del tipo

$$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

con  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  radici del polinomio. Se denotiamo con  $\Delta_\varphi(\cdot)$  la variazione totale di fase per  $\omega$  che si muove lungo l'asse immaginario da  $-\infty$  a  $+\infty$ , avremo:

$$\Delta_\varphi \left( \frac{d_{\text{CH}}(j\omega)}{d_{\text{AP}}(j\omega)} \right) = \Delta_\varphi(d_{\text{CH}}(j\omega)) - \Delta_\varphi(d_{\text{AP}}(j\omega)) = \Delta_\varphi(1 + W_{\text{AP}}(j\omega))$$

Ricordiamoci che, concordamente a come si misurano gli angoli sul piano complesso, la variazione di fase è positiva se avviene in senso anti-orario; è negativa altrimenti.

### 5.2.1 Assenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto

Consideriamo ora il singolo binomio  $\lambda - \lambda_i$ . Allora è facile verificare che

$$\Delta_\varphi(j\omega - \lambda_i) = \begin{cases} -\pi, & \text{Re}[\lambda_i] > 0 \\ +\pi, & \text{Re}[\lambda_i] < 0 \end{cases}$$

Nel caso in cui  $\text{Re}[\lambda_i] = 0$  non si può sciogliere la riserva sul segno della variazione di  $\pi$ , per cui per il momento escludiamo questo caso. Dunque, ipotizzando  $N_{\text{CH}}$  e  $N_{\text{AP}}$  il numero di radici a parte reale positiva dei polinomi caratteristici dei sistemi a ciclo chiuso e aperto, avremo:

$$\Delta_\varphi(d_{\text{CH}}(j\omega)) = -\pi N_{\text{CH}} + \pi(n - N_{\text{CH}}) \quad \Delta_\varphi(d_{\text{AP}}(j\omega)) = -\pi N_{\text{AP}} + \pi(n - N_{\text{AP}})$$

da cui

$$\Delta_\varphi \left( \frac{d_{\text{CH}}(j\omega)}{d_{\text{AP}}(j\omega)} \right) = -\pi N_{\text{CH}} + \pi(n - N_{\text{CH}}) - (-\pi N_{\text{AP}} + \pi(n - N_{\text{AP}})) = 2\pi(N_{\text{AP}} - N_{\text{CH}})$$

Quindi, tenendo conto della formula iniziale e che  $\mathcal{N}_0 = \Delta_\varphi(\cdot)/(2\pi)$  è il numero di giri (contati positivamente in senso antiorario) che si compie attorno all'origine quando  $\omega$  va da  $-\infty$  a  $+\infty$ , avremo:

$$N_{\text{CH}} = N_{\text{AP}} - \mathcal{N}_0(1 + W_{\text{AP}}(j\omega))$$

Se trasliamo di  $-1$  la curva relativa a  $1 + W_{\text{AP}}(j\omega)$  possiamo ragionare in termini di  $\mathcal{N}_{-1}$  ossia di giri che la curva  $W_{\text{AP}}(j\omega)$  compie attorno al punto  $-1 + j0$  (curva che prende il nome di **diagramma polare** della funzione di trasferimento), il che ci porta alla seguente formulazione finale.

**Criterio di Nyquist:** *dato un sistema a controreazione unitaria, nel caso di assenza di radici a parte reale nulla per il polinomio caratteristico del sistema a ciclo aperto, il numero di radici a parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso è uguale al numero di radici a parte reale positiva del polinomio caratteristico del sistema a ciclo aperto meno il numero di giri (positivi in senso antiorario) che la funzione di trasferimento a ciclo aperto  $W_{\text{AP}}(j\omega)$  compie attorno al punto  $-1 + j0$  per  $\omega$  che si muove da  $-\infty$  a  $+\infty$ :*

$$N_{\text{CH}} = N_{\text{AP}} - \mathcal{N}_{-1}(W_{\text{AP}}(j\omega))$$

Chiaramente, la condizione per avere la stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso è:

$$\mathcal{N}_{-1}(W_{\text{AP}}(j\omega)) = N_{\text{AP}}$$

**Proposizione 5.1** - Un modo per contare il numero di giri del diagramma polare (o di una generica curva chiusa orientata) attorno ad un punto consiste nel considerare le intersezioni della

curva con una semiretta uscente dal punto. Le intersezioni sono positive se concordi con il verso antiorario di rotazione, altrimenti sono negative: la somma algebrica delle intersezioni restituisce il numero di giri. Si noti che ai fini del conteggio non ha importanza la direzione della semiretta uscente.

Qualora il diagramma polare passasse per il punto  $-1 + j0$ , vuol dire che il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso ha almeno una radice a parte reale nulla. In questi casi si segue la seguente procedura:

- 1) si deforma il diagramma polare in modo da lasciare  $-1 + j0$  a sinistra dell'intersezione del semiasse reale negativo, concordemente con il verso crescente delle pulsazioni. Applicando il criterio di Nyquist in questo modo si ottiene il numero delle radici a parte reale positiva;
- 2) quindi, si deforma il diagramma polare in modo da lasciare  $-1 + j0$  a destra dell'intersezione del semiasse reale negativo, concordemente con il verso crescente delle pulsazioni. Applicando il criterio di Nyquist in questo modo si ottiene il numero delle radici a parte reale positiva o nulla;
- 3) dalla loro differenza si ricava anche il numero delle radici del polinomio caratteristico a ciclo chiuso a parte reale nulla.

### 5.2.2 Diagrammi polari

Per l'applicazione del Criterio di Nyquist è, dunque, fondamentale tracciare il **diagramma polare** della funzione di trasferimento, ossia la rappresentazione parametrica nel piano complesso della funzione di trasferimento  $W(s)$ , calcolata in  $s = j\omega$ , al variare della pulsazione  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ . Tale diagramma è orientato nel senso crescente delle pulsazioni. In particolare, la funzione di trasferimento può essere interpretata come quella funzione complessa ad argomento complesso che trasforma la curva  $s = j\omega$ , asse immaginario del piano di complesso, nella curva  $W(j\omega)$ , il diagramma polare appunto. Riguardo alle proprietà di una generica trasformazione di variabile complessa, si riporta la seguente proposizione.

**Proposizione 5.2** - una trasformazione di variabile complessa applicata ad una curva del piano complesso che non contiene (eventuali) singolarità della trasformazione è una curva chiusa.

Quindi è possibile fare le seguenti considerazioni:

- la funzione di trasferimento è un rapporto proprio di polinomi, per cui i suoi punti di singolarità sono costituiti dai poli;
- il diagramma polare è una curva chiusa del piano complesso se l'asse immaginario non passa per i poli della funzione di trasferimento, ossia se l'insieme dei poli di  $W(s)$  non contiene numeri complessi puramente immaginari;
- il diagramma polare è una curva chiusa se il denominatore non presenta termini monomi o trinomi non smorzati ( $\zeta = 0$ ).

Per disegnare i diagrammi polari, è consigliabile utilizzare il seguente approccio:

- 1) si utilizzano i diagrammi di Bode per tracciare la curva relativa alle pulsazioni positive:  $\omega \in (0, +\infty)$ ;

- 2) poiché la funzione di trasferimento è a coefficienti reali, si ha che  $W(-j\omega)$  è uguale al complesso coniugato di  $W(j\omega)$ :

$$W(-j\omega) = W(j\omega)^*$$

Dunque, per disegnare il diagramma polare in corrispondenza delle pulsazioni negative, si simmetrizza rispetto all'asse reale la curva tracciata per pulsazioni positive;

- 3) a meno di particolari specifiche, non è necessario disegnare il diagramma polare facendo molta attenzione alla metrica adottata: ciò che conta nel disegno è indicare gli attraversamenti degli assi coordinati e i giri che il diagramma fa attorno ad alcuni punti del piano complesso.

### 5.2.3 Esempi di diagrammi polari senza poli immaginari

Partiamo da un caso estremamente semplice:

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0$$

Dai diagrammi di Bode segue che per  $\omega = 0^+$  le ampiezze valgono 1 con fase nulla; al crescere di  $\omega$  le ampiezze si riducono in modo monotono verso 0, e le fasi decrescono in modo monotono verso  $-\pi/2$ . Per cui il diagramma polare per le  $\omega$  positive è quello descritto in Figura 5.4. Aggiungendo la parte simmetrica rispetto all'asse reale, otteniamo il diagramma polare completo in Figura 5.5. Applicando il criterio di Nyquist (il punto rosso nelle Figure 5.4 e 5.5 indica il punto  $-1 + j0$ ), abbiamo

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 0$$

Dunque, stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso.

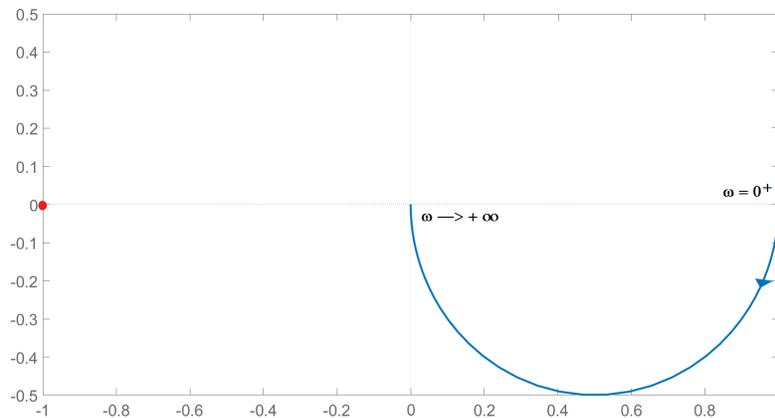


Figura 5.4 - Diagramma polare di  $\frac{1}{1 + \tau s}$ ,  $\tau > 0$ , per pulsazioni positive

Se avessimo considerato

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 - \tau s}, \quad \tau > 0$$

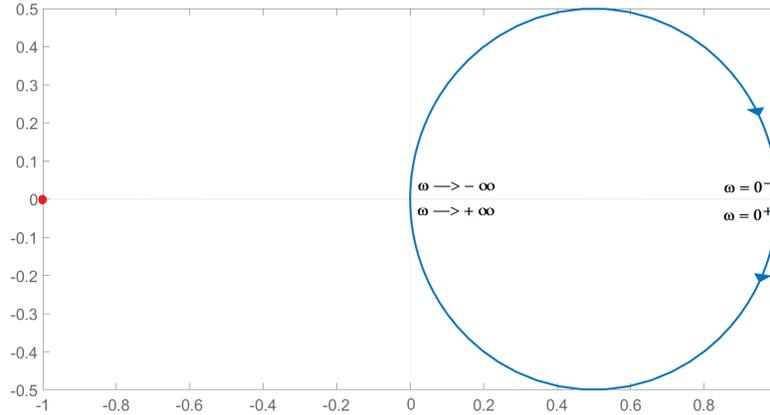


Figura 5.5 - Diagramma polare di  $\frac{1}{1+\tau s}$ ,  $\tau > 0$

il diagramma polare sarebbe stato speculare rispetto all'asse dei reali (perché le fasi aumentano di  $\pi/2$  invece di diminuire  $-\pi/2$ ). Da cui, applicando il criterio di Nyquist

$$N_{AP} = 1, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 1$$

Dunque, instabilità del sistema a ciclo chiuso, con 1 polo a parte reale positiva.

Consideriamo ora un termine trinomio al denominatore, del tipo:

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \zeta = 0.1$$

Dai diagrammi di Bode segue che per  $\omega = 0^+$  le ampiezze valgono 1 con fase nulla; al crescere di  $\omega$ , poiché  $\zeta = 0.1 < 0.5$ , le ampiezze aumentano raggiungendo un massimo in corrispondenza della pulsazione  $\omega = \omega_n$ , per poi andare definitivamente a 0; invece, le fasi decrescono in modo monotono verso  $-\pi$ . Per cui il diagramma polare per le  $\omega$  positive è quello descritto in Figura 5.6. Aggiungendo la parte simmetrica rispetto all'asse reale, otteniamo il diagramma polare completo in Figura 5.7. Applicando il criterio di Nyquist, abbiamo

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 0$$

Dunque, stabilità asintotica del sistema a ciclo chiuso.

Se avessimo considerato

$$W_{AP}(s) = \frac{1}{1 - \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \zeta = 0.1$$

il diagramma polare sarebbe stato speculare rispetto all'asse dei reali (perché le fasi aumentano di  $\pi$  invece di diminuire di  $-\pi$ ). Da cui, applicando il criterio di Nyquist

$$N_{AP} = 2, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 2$$

Dunque, instabilità del sistema a ciclo chiuso, con 2 poli a parte reale positiva.

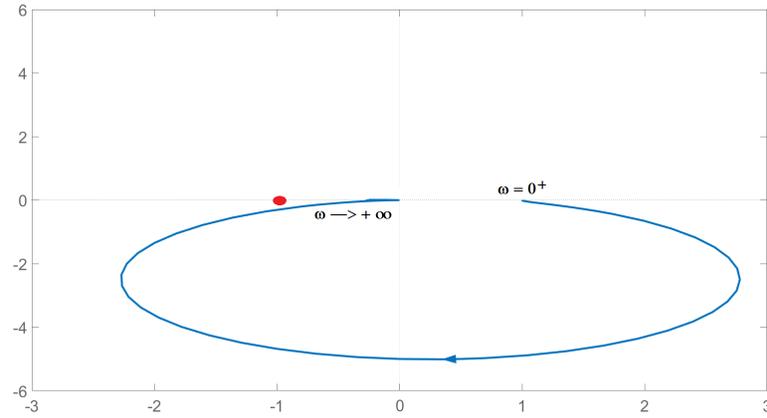


Figura 5.6 - Diagramma polare di  $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$  per pulsazioni positive

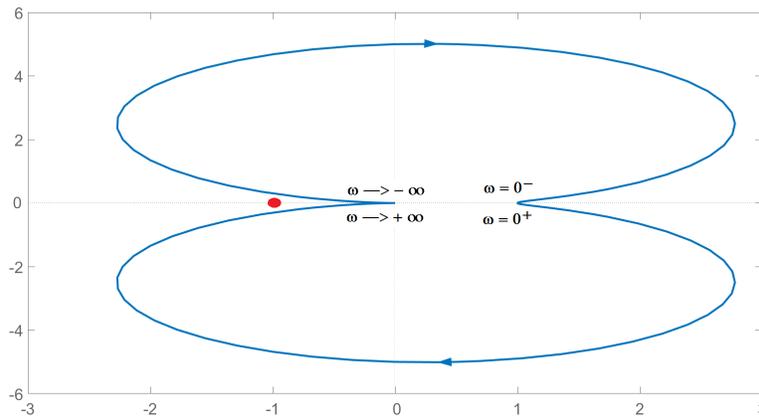


Figura 5.7 - Diagramma polare di  $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$

**Esempio del paragrafo 3.5.6.** Riportiamo per comodità la funzione di trasferimento e i diagrammi di Bode:

$$W_{AP}(s) = \frac{2000(10 - s)^2}{(s + 100)(s + 500)(s^2 + 2s + 4)}.$$

Per  $\omega \mapsto 0^+$  il diagramma parte dal punto  $(1, 0)$ , sul semiasse reale positivo del piano complesso. I moduli decrescono dal valore iniziale fino a zero ( $-\infty$  in dB). La fase decresce passando per  $-\frac{\pi}{2}$  radianti (primo attraversamento del semiasse immaginario negativo), per  $-\pi$  radianti (attraversamento del semiasse reale negativo), per  $-\frac{3}{2}\pi$  radianti (attraversamento del semiasse immaginario positivo), per  $-2\pi$  radianti (attraversamento del semiasse reale positivo), per  $-\frac{5}{2}\pi$  radianti (secondo attraversamento del semiasse immaginario negativo) e, infine, si assesta asintoticamente a  $-3\pi$  radianti, ossia il diagramma termina nell'origine (modulo pari a zero) tangendo il semiasse reale

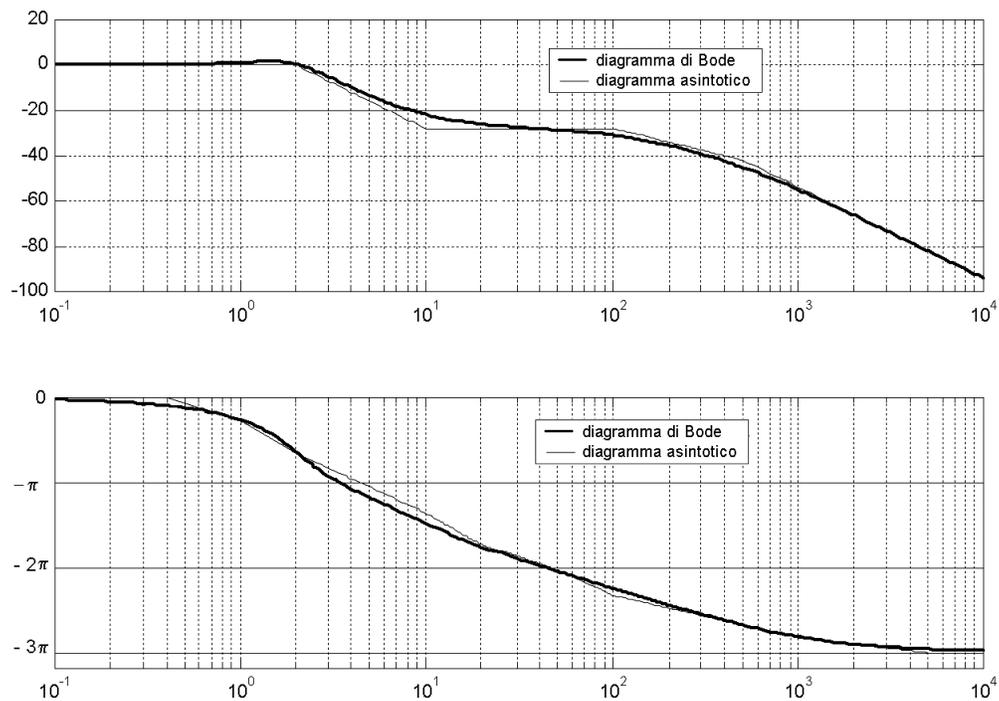


Figura 5.8 - Diagramma di Bode

negativo (fase pari a  $-\pi$  radianti), vedi Figura 5.9. Simmetrizzando la curva rispetto all'asse reale, si tiene conto anche delle pulsazioni negative e si ottiene il diagramma polare completo, Figura 5.10.

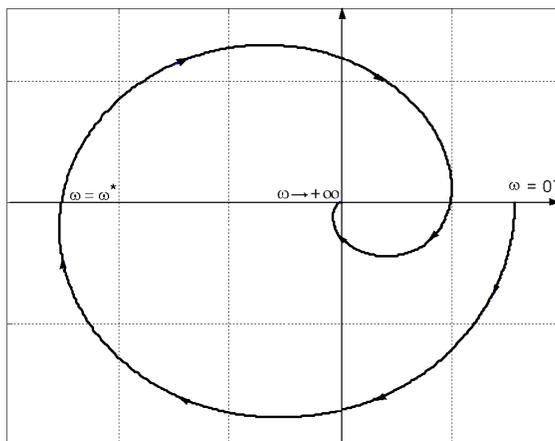


Figura 5.9 - Diagramma polare per pulsazioni positive

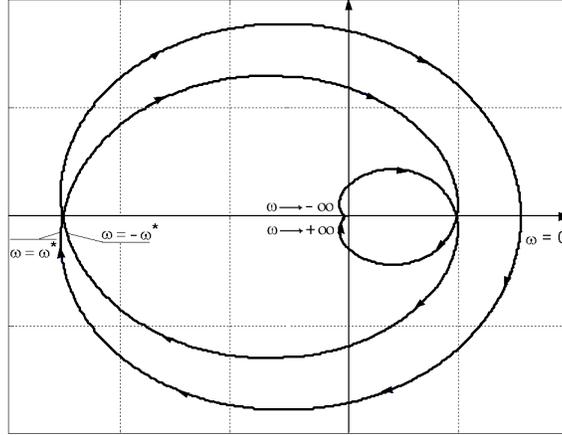


Figura 5.10 - Diagramma polare

Dal diagramma polare segue che è importante conoscere se il punto  $-1 + j0$  è interno o esterno al diagramma polare. Se fosse interno avremmo che il diagramma polare fa 2 giri in senso orario, dunque

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = -2 \quad \implies \quad N_{CH} = 0 - (-2) = 2$$

Il sistema a ciclo chiuso non sarebbe stabile, perché avrebbe due poli a parte reale positiva. Invece, se il punto  $-1 + j0$  fosse esterno, avremmo 0 giri del diagramma polare intorno a  $-1 + j0$ , per cui:

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 0$$

e il sistema a ciclo chiuso sarebbe asintoticamente stabile.

Da quanto scritto segue che è fondamentale capire quanto vale il modulo della  $W_{AP}$  in corrispondenza della pulsazione di attraversamento a  $-\pi$ . Guardando i diagrammi di Bode di Figura 5.8, tale attraversamento si ha per un  $\omega^* \in [3, 4]$ rad/sec, con le ampiezze attenuate di circa 10dB, ossia:

$$|W_{AP}(j\omega^*)| < 1$$

il che assicura che il punto  $-1 + j0$  è esterno al diagramma polare, da cui segue la stabilità asintotica.

#### 5.2.4 Presenza di radici a parte reale nulla nel polinomio a ciclo aperto

Nel caso di poli puramente immaginari, il diagramma polare, così come è stato definito, non è chiuso. Per poter avere un diagramma chiuso è necessario, dunque, modificare il percorso dell'asse immaginario. Si scelga come percorso alternativo il *percorso uncinato*, che lascia le singolarità a sinistra (in Figura 5.11 si suppone la presenza di 3 poli puramente immaginari, di cui uno nell'origine). Tale percorso, in prossimità delle singolarità, si scosta da quello dell'asse immaginario su archi di curva di raggio infinitesimo, cosicché la chiusura del diagramma avvenga su archi di curva di raggio grande a piacere. Si parla, in questo caso di *chiusura all'infinito*: essa deve essere percorsa in modo che si lasci la singolarità (l'infinito nel diagramma polare) a sinistra, per cui deve essere sempre percorsa in *senso orario*. Utilizzando tale percorso uncinato si ottengono una o più chiusure all'infinito, in modo da poter nuovamente calcolare il numero di giri attorno al punto  $-1 + j0$ .



Figura 5.11 - Percorso a uncino

**Esempio del paragrafo 3.5.5.** Riportiamo per comodità la funzione di trasferimento e i diagrammi di Bode:

$$W_{AP}(s) = \frac{10^6}{s(s+10)^2(s-400)^2}$$

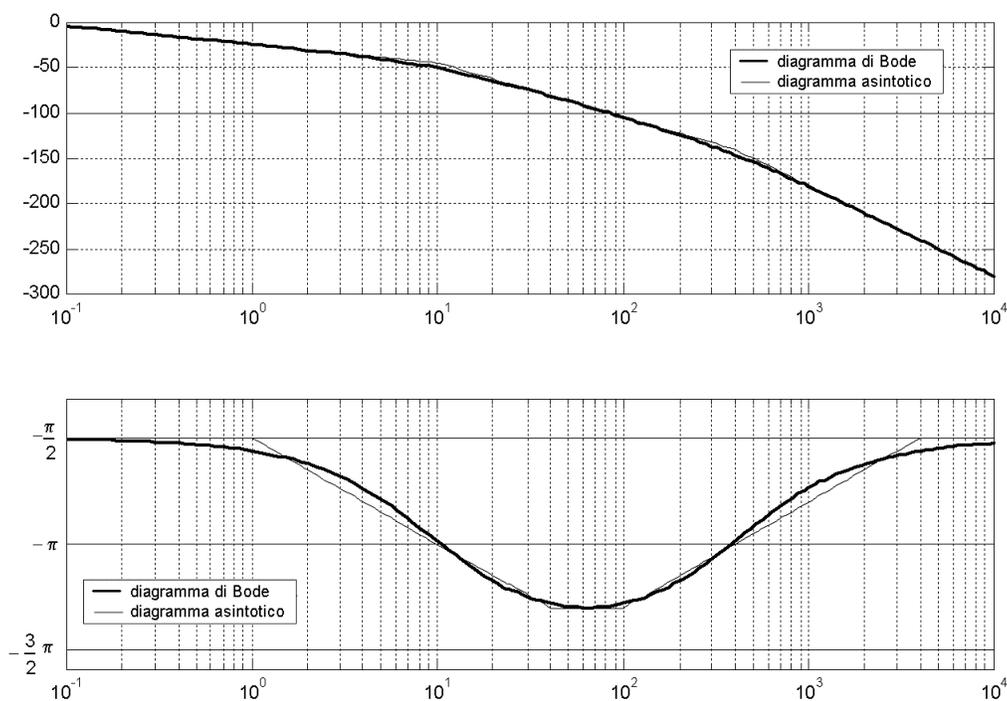


Figura 5.12 - Diagrammi di Bode

La funzione di trasferimento ha un polo nell'origine, per cui il diagramma polare non è una curva chiusa. Per valori di  $\omega \mapsto 0^+$ , l'ampiezza è infinita e la fase è  $-\frac{\pi}{2}$  radianti: il diagramma polare parte tangendo all'infinito il semiasse immaginario negativo. Quindi, con un decrescente andamento dei

moduli, si sposta dal terzo al secondo quadrante del piano complesso, tagliando una prima volta in  $\omega_1^*$  il semiasse reale negativo. Nel secondo quadrante la fase continua a decrescere fino a un valore minimo, maggiore comunque di  $-\frac{3}{2}\pi$  radianti. Quindi inverte il proprio andamento, aumentando fino a tagliare una seconda volta il semiasse reale negativo in  $\omega_2^*$ , proseguendo, di nuovo nel terzo quadrante, verso l'origine degli assi, tangendo asintoticamente il semiasse immaginario negativo per  $\omega \mapsto +\infty$ , Figura 5.13. Il diagramma si completa aggiungendo il percorso parametrizzato dalle pulsazioni negative (Figura 5.14). La presenza di un polo nell'origine determina un diagramma polare non chiuso. Per ottenere un diagramma chiuso, si effettua la chiusura all'infinito della curva in senso orario, raccordando il punto a pulsazione  $\omega = 0^-$  con quello a pulsazione  $\omega = 0^+$  utilizzando un arco con raggio di curvatura grande a piacere, Figura 5.15.

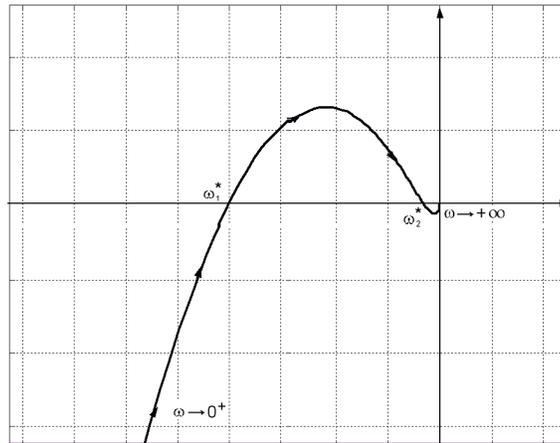


Figura 5.13 - Diagramma polare, pulsazioni positive

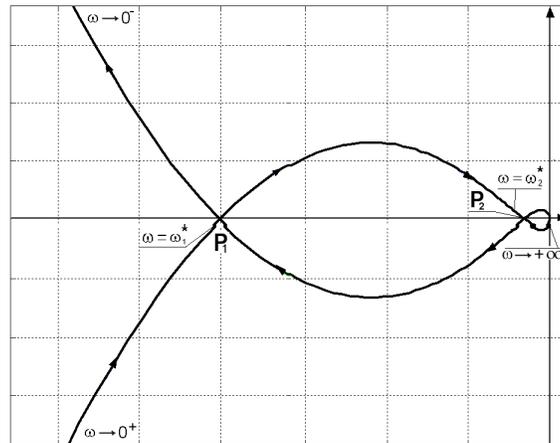


Figura 5.14 - Diagramma polare completo

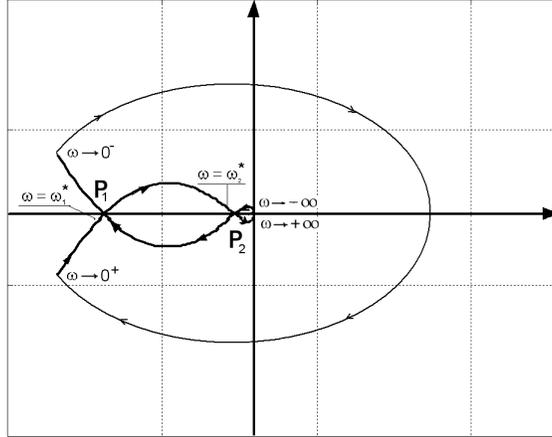


Figura 5.15 - Diagramma polare, chiusura all'infinito

Dal diagramma polare chiuso segue che si possono avere 3 possibilità per il punto  $-1 + j0$ :

1) esterno alla curva. In questo caso  $\mathcal{N}_{-1} = 0$  e accade se

$$|W(j\omega_1^*)| < 1$$

2) interno alla curva, tra i punti  $P_1$  e  $P_2$ . In questo caso  $\mathcal{N}_{-1} = -2$  e accade se

$$|W(j\omega_2^*)| < 1 < |W(j\omega_1^*)|$$

3) interno alla curva, tra il punto  $P_2$  e l'origine. In questo caso  $\mathcal{N}_{-1} = 0$  e accade se

$$|W(j\omega_2^*)| > 1$$

Guardando i diagrammi di Bode di Figura 5.12, abbiamo che il primo attraversamento a  $-\pi$  c'è per  $\omega_1^* \simeq 10\text{rad/sec}$ , a cui corrisponde un'attenuazione di circa 50dB; il secondo attraversamento si ottiene per  $\omega_2^* \simeq 400\text{rad/sec}$ , a cui corrisponde un'attenuazione di circa 150dB. Riassumendo:

$$|W(j\omega_2^*)| < |W(j\omega_1^*)| < 1$$

il che porta alla conclusione che

$$N_{AP} = 2, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = 0 \quad \implies \quad N_{CH} = 2$$

Il sistema a ciclo chiuso è instabile con 2 poli a parte reale positiva.

**Esempio del paragrafo 3.5.7.** Riportiamo per comodità la funzione di trasferimento e i diagrammi di Bode.

$$W(s) = \frac{1440(2 - 5s)}{(4 + 5s)^2(36 + s^2)}$$

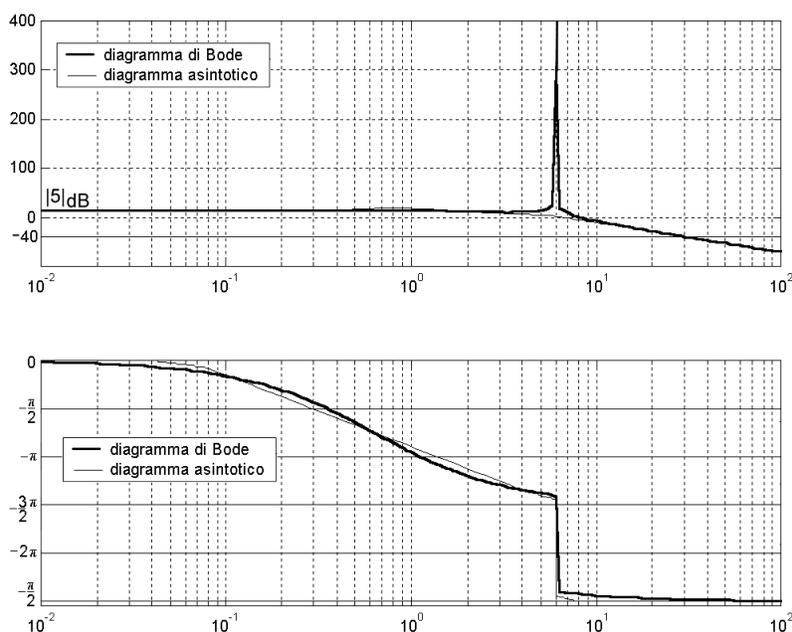


Figura 5.16 - Diagramma di Bode

La funzione di trasferimento ha una coppia di poli puramente immaginari (termine trinomio non smorzato  $s^2 + 36$ ), per cui vi sono due chiusure all'infinito. Per  $\omega \rightarrow 0^+$ , il diagramma polare parte dal punto  $(5, 0)$  del semiasse reale positivo. Quindi con lievi variazioni del modulo, il diagramma ruota in senso orario attraversando il quarto, il terzo e il secondo quadrante, tagliando il semiasse reale negativo per  $\omega = \omega^*$ . In prossimità della pulsazione di risonanza il modulo diverge all'infinito, generando così un asintoto obliquo nel diagramma polare, Figura 5.17.

Nel passare oltre la pulsazione di risonanza, il diagramma delle fasi subisce uno sfasamento a gradino di  $-\pi$  radianti: il diagramma polare, dunque, riprende con ampiezza infinita dall'altro capo dell'asintoto. Per pulsazioni maggiori di 6rad/sec, al crescere di  $\omega$ , il modulo tende rapidamente a zero e le fasi convergono asintoticamente a  $-\frac{\pi}{2}$  radianti, cosicché il diagramma polare converge nell'origine degli assi, tangendo il semiasse immaginario negativo, Figura 5.18.

Per ottenere una curva chiusa, il percorso uncinato aggira le singolarità raccordando i punti a pulsazione  $6^-$  e  $6^+$  con una chiusura all'infinito percorsa in senso orario, Figura 5.19.

Per ottenere la curva polare rispetto alle pulsazioni negative, si simmetrizza il diagramma di Figura 5.19 rispetto all'asse reale. La seconda chiusura all'infinito si ottiene in corrispondenza della pulsazione  $\omega = -6$ rad/sec, Figura 5.20.

Dal diagramma polare segue che il punto  $-1 + j0$  può essere interno o esterno, a seconda che  $|W(j\omega^*)|$  sia maggiore o minore di 1. Dal diagramma di Bode di Figura 5.16 segue che l'attraversamento a  $-\pi$  si ha in corrispondenza di una pulsazione  $\omega^* \simeq 1$ rad/sec, a cui corrisponde un'amplificazione di poco superiore ai 5dB. Da cui segue che il punto  $-1 + j0$  è interno, e quindi, applicando il Criterio di Nyquist:

$$N_{AP} = 0, \quad \mathcal{N}_{-1}(W_{AP}(j\omega)) = -2 \quad \implies \quad N_{CH} = 2$$

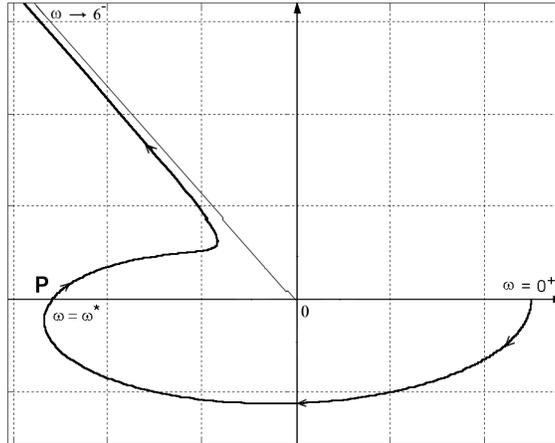


Figura 5.17 - Diagramma polare per  $0 < \omega < 6$ .

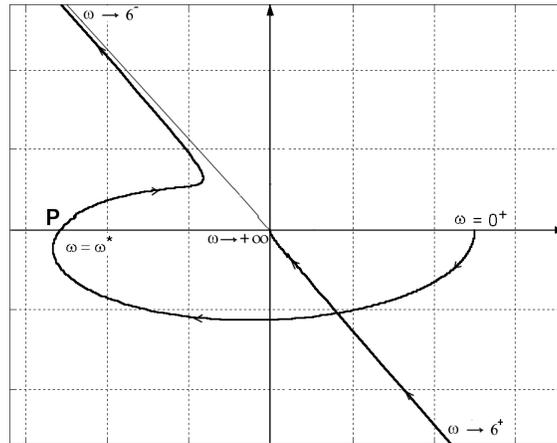


Figura 5.18 - Diagramma polare per pulsazioni positive.

Il sistema a ciclo chiuso è instabile, con 2 poli a parte reale positiva.

### 5.3 Margini di stabilità

È interessante, ai fini della stabilità, valutarne l'analisi al variare dei parametri che costituiscono la funzione di trasferimento in catena aperta. In particolare, è significativo il caso in cui il solo parametro che varia è il guadagno di Bode. Questa situazione rappresenta, ad esempio, un sistema a controreazione del tipo in Figura 5.1, la cui azione di controllo  $C(s)$  sia rappresentata dal solo guadagno  $K$ . Oppure può essere il caso in cui i poli e gli zeri della  $C(s)$  siano già stati assegnati, e resta da valutare il solo valore del guadagno di Bode. Analizzando il diagramma polare della

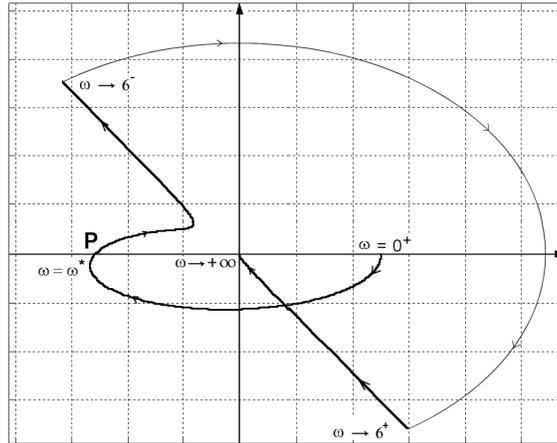


Figura 5.19 - Diagramma polare, prima chiusura all'infinito.

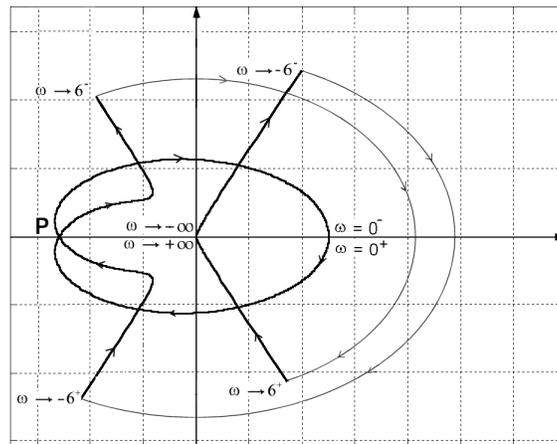


Figura 5.20 - Diagramma polare, seconda chiusura all'infinito

funzione di trasferimento a catena aperta, all'aumentare del guadagno  $K$  la curva si “espande” mantenendo inalterate le forme, in quanto è solo l'ampiezza del raggio vettore che cresce uniformemente per ogni valore delle fasi. Ragionando in altri termini, si può pensare di tenere fisso il diagramma (costruito, ad esempio, per  $K = 1$ ) riducendo la scala degli assi coordinati al crescere di  $K$ .

Un sistema a controreazione di questo tipo si dice **a stabilità regolare** se esiste un solo valore critico positivo del parametro  $K$  al crescere del quale si perde la stabilità (questa classe di sistemi ha sicuri riscontri nella realtà, in quanto è plausibile la perdita di stabilità al crescere del guadagno in catena aperta). Un esempio significativo per questa classe di sistemi è costituito da un sistema già stabile in catena aperta ( $P_{AP} = 0$ ), con il diagramma polare che ha un solo attraversamento a  $-\pi$ : la stabilità è garantita se il punto  $-1 + j0$  è esterno al diagramma, ossia se il guadagno in

catena aperta è così contenuto da far sì che in corrispondenza della pulsazione  $\omega^*$  di intersezione con il semiasse reale negativo, la funzione di trasferimento sia in modulo  $< 1$ . Sia  $W_{AP}(s) = KF(s)$ . Allora:

$$|W_{AP}(j\omega^*)| < 1, \quad \implies \quad K < K^* = \frac{1}{|F(j\omega^*)|}$$

Per i sistemi a stabilità regolare è possibile stabilire anche dei margini a garanzia della stabilità del sistema a ciclo chiuso in presenza di eventuali variazioni o incertezze sugli altri parametri che costituiscono la funzione di trasferimento.

**Definizione 5.3** - Si definisce **margin** di guadagno la grandezza (vedi Figura 5.21):

$$m_g = \frac{1}{|W_{AP}(j\omega^*)|}, \quad \text{con} \quad \angle W_{AP}(j\omega^*) = -\pi$$

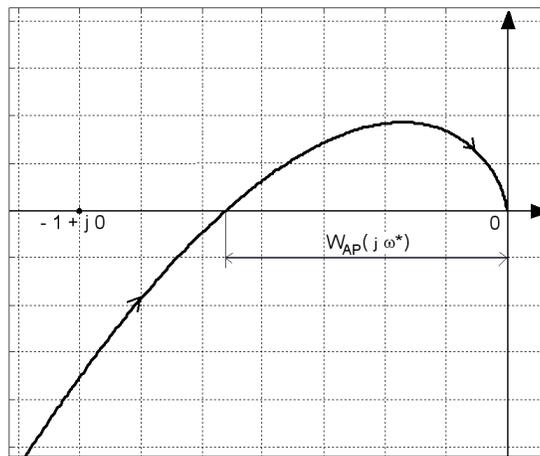


Figura 5.21 - Margine di guadagno sul diagramma polare

Come si può notare, il margine di guadagno è  $> 1$  se, e solo se, il sistema a ciclo chiuso è stabile e al crescere di tale margine l'intersezione del diagramma polare con il semiasse reale negativo si allontana progressivamente dal punto critico  $-1 + j0$ , cosicché la condizione di stabilità è robusta rispetto ad eventuali incertezze sul modello. Altra osservazione è che per valori di  $K > 0$ , la pulsazione  $\omega^*$  non varia al variare di  $K$  perché non variano le fasi: ovviamente, varierà il modulo della funzione di trasferimento in catena aperta valutato in  $\omega^*$ . Per come è definito, il margine di guadagno (valutato di dB) può essere facilmente individuato anche sui diagrammi di Bode, Figura 5.22:

$$|m_g|_{dB} = 20 \log \frac{1}{|W_{AP}(j\omega^*)|} = -|W_{AP}(j\omega^*)|_{dB}$$

Un modo alternativo per assegnare un margine di stabilità per i sistemi a stabilità regolare consiste nel considerare il *margin* di fase definito come segue.

**Definizione 5.4** - Si definisce **margin** di fase l'angolo individuato dal semiasse reale negativo e la semiretta uscente dall'origine e passante per il punto del diagramma polare di modulo unitario, Figura 5.23:

$$m_\varphi = \angle W(j\bar{\omega}) + \pi, \quad \text{con} \quad |W(j\bar{\omega})| = 1,$$

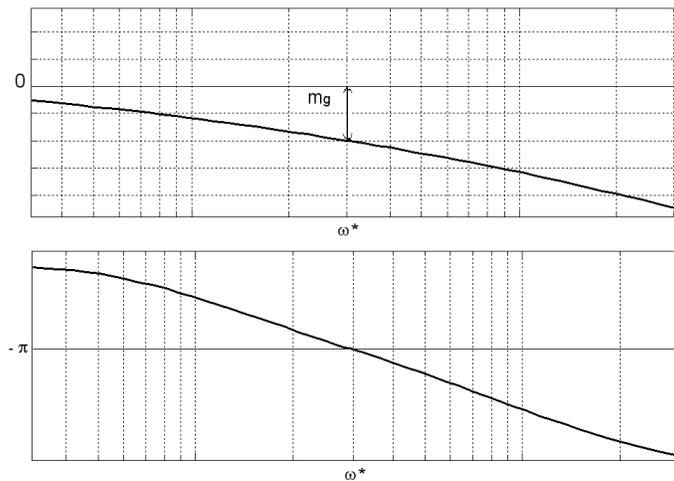


Figura 5.22 - Margine di guadagno sui diagrammi di Bode

Il margine di fase è positivo (a meno di multipli di  $2\pi$ ) se il sistema a ciclo chiuso è stabile.

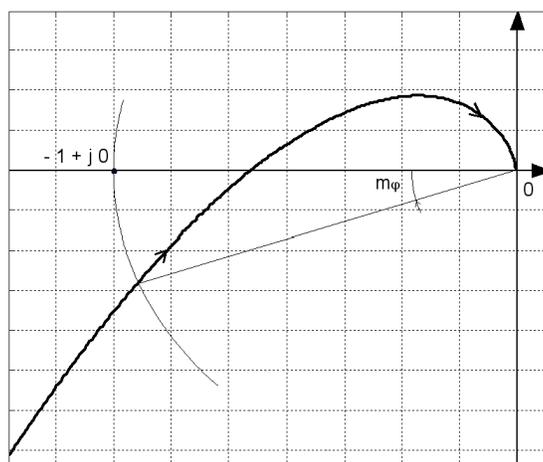


Figura 5.23 - Margine di fase sul diagramma polare

Anche il margine di fase è facilmente individuabile sui diagrammi di Bode, vedi Figura 5.244.

**Esempio dal paragrafo 3.5.6.** Consideriamo la funzione di trasferimento di cui abbiamo disegnato i diagrammi di Bode nel paragrafo 3.5.6

$$W_{AP}(s) = K \cdot \frac{2000(10 - s)^2}{(s + 100)(s + 500)(s^2 + 2s + 4)}$$

e di cui abbiamo analizzato la stabilità con il criterio di Nyquist nel paragrafo precedente.  $K$  è il

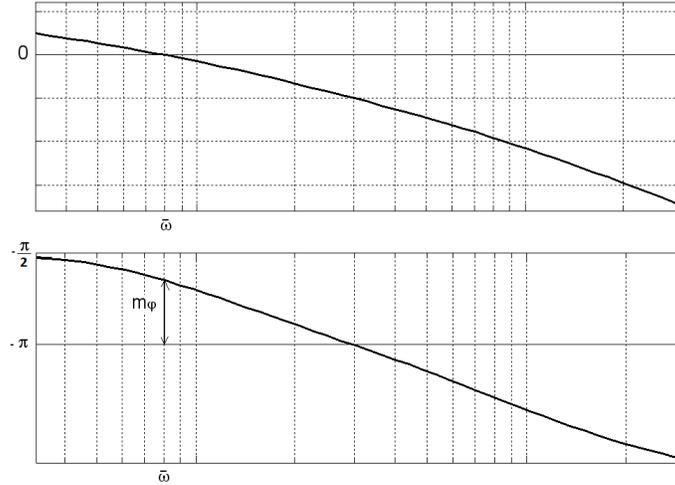


Figura 5.24 - Margine di fase sui diagrammi di Bode

guadagno relativo al controllore  $C(s) = K$ . Si tratta chiaramente di un sistema a stabilità regolare, perché si perde la stabilità al crescere del guadagno  $K$  in catena aperta:  $N_{AP} = 0$  per cui il punto  $-1 + j0$  deve cadere fuori del diagramma di Nyquist che, al contrario, potrebbe inglobarlo al crescere del guadagno  $K$ . Supponiamo si voglia settare  $K$  in modo da garantire un margine di guadagno  $|m_g|_{dB} > 10dB$ . Quindi:

$$|m_g|_{dB} = -|K|_{dB} - |W(j\omega^*)|_{dB} > 10dB \quad \implies \quad |K|_{dB} < -|W(j\omega^*)|_{dB} - 10dB$$

Dai diagrammi di Bode di Figura 5.8 esce fuori che  $|W(j\omega^*)|_{dB} \simeq -10dB$  per cui, possiamo scegliere

$$|K|_{dB} < 0dB$$

da cui  $K < 1$

**Esempio dal paragrafo 3.5.7.** Consideriamo la funzione di trasferimento di cui abbiamo disegnato i diagrammi di Bode nel paragrafo 3.5.7

$$W_{AP}(s) = K \cdot \frac{1440(2 - 5s)}{(4 + 5s)^2(36 + s^2)}$$

e di cui abbiamo analizzato la stabilità con il criterio di Nyquist nel paragrafo precedente.  $K$  è il guadagno relativo al controllore  $C(s) = K$ . Anche in questo caso si tratta di un sistema a stabilità regolare, perché si perde definitivamente la stabilità al crescere del guadagno  $K$  in catena aperta. Supponiamo si voglia settare  $K$  in modo da garantire un margine di guadagno  $|m_g|_{dB} > 100dB$ . Quindi:

$$|m_g|_{dB} = -|K|_{dB} - |W(j\omega^*)|_{dB} > 100dB \quad \implies \quad |K|_{dB} < -|W(j\omega^*)|_{dB} - 100dB$$

Dai diagrammi di Bode di Figura 5.16 esce fuori che  $|W(j\omega^*)|_{dB} \simeq 5dB$  per cui possiamo scegliere

$$|K|_{dB} < -105dB$$

da cui

$$20 \log(K) < -105 \quad \implies \quad K < 10^{-\frac{21}{4}} \simeq 5.6 \cdot 10^{-6}$$

### 5.3.1 Reti anticipatrici per aumentare il margine di fase

Supponiamo che il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta sia quello riportato in *blu* nella Figura 5.25.

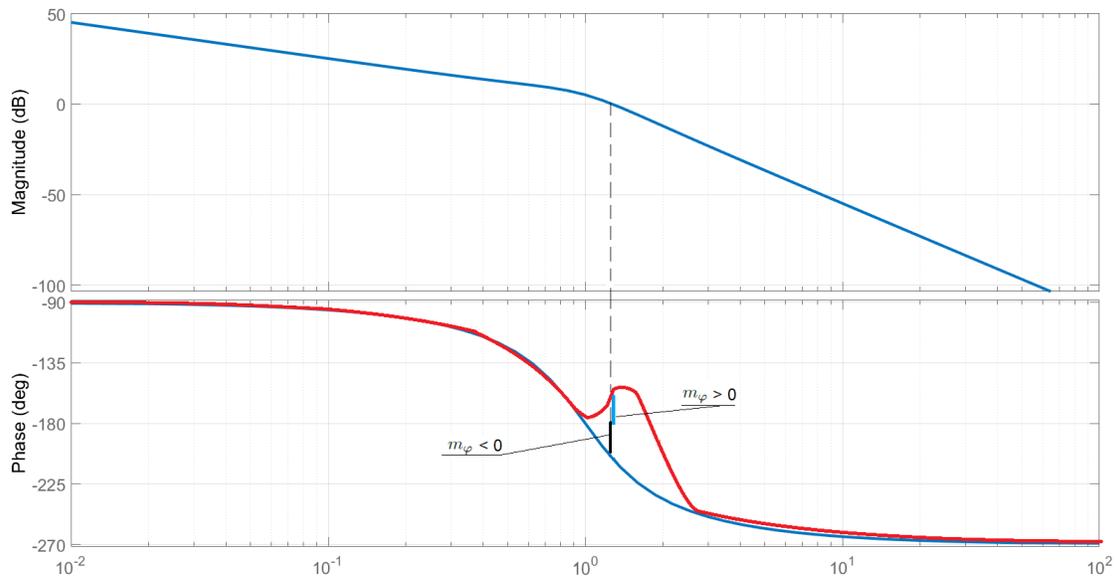


Figura 5.24 - Diagrammi di Bode di un sistema instabile, a stabilità regolare

Il sistema è del tipo a stabilità regolare, ed è instabile. Infatti ha un margine di guadagno negativo: in corrispondenza della pulsazione di attraversamento delle fasi a  $-\pi$  si ha un guadagno positivo in dB (cioè margine di guadagno negativo) e, di contro, in corrispondenza della pulsazione di attraversamento delle ampiezze a 0dB si ha una fase minore di  $-\pi$  (cioè margine di fase negativo).

Un modo per migliorare entrambi i margini di stabilità potrebbe essere ridurre il guadagno in catena aperta. Supponiamo, però, che per specifiche di sistema, il guadagno non possa essere diminuito. L'uso di una **rete anticipatrice**, come vedremo, contribuirà a risolvere la specifica generando uno *spanciamento* (innalzamento) del diagramma delle fasi in corrispondenza della pulsazione a 0dB delle ampiezze, senza modificare il valore di tale pulsazione.

Una rete anticipatrice è definita come il seguente rapporto proprio di polinomi:

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}, \quad \tau > 0, \quad m \geq 1$$

con  $\tau, m$  parametri della rete regolatrice. Vediamone i diagrammi di Bode, riportati nella Figura 5.25 per  $\tau = 1$  (sono detti anche **diagrammi universali** di una rete anticipatrice).

Per quel che riguarda le ampiezze, ci sono due pulsazioni di taglio:

$$\omega_1 = 1/\tau \leq \omega_2 = m/\tau, \quad m > 1$$

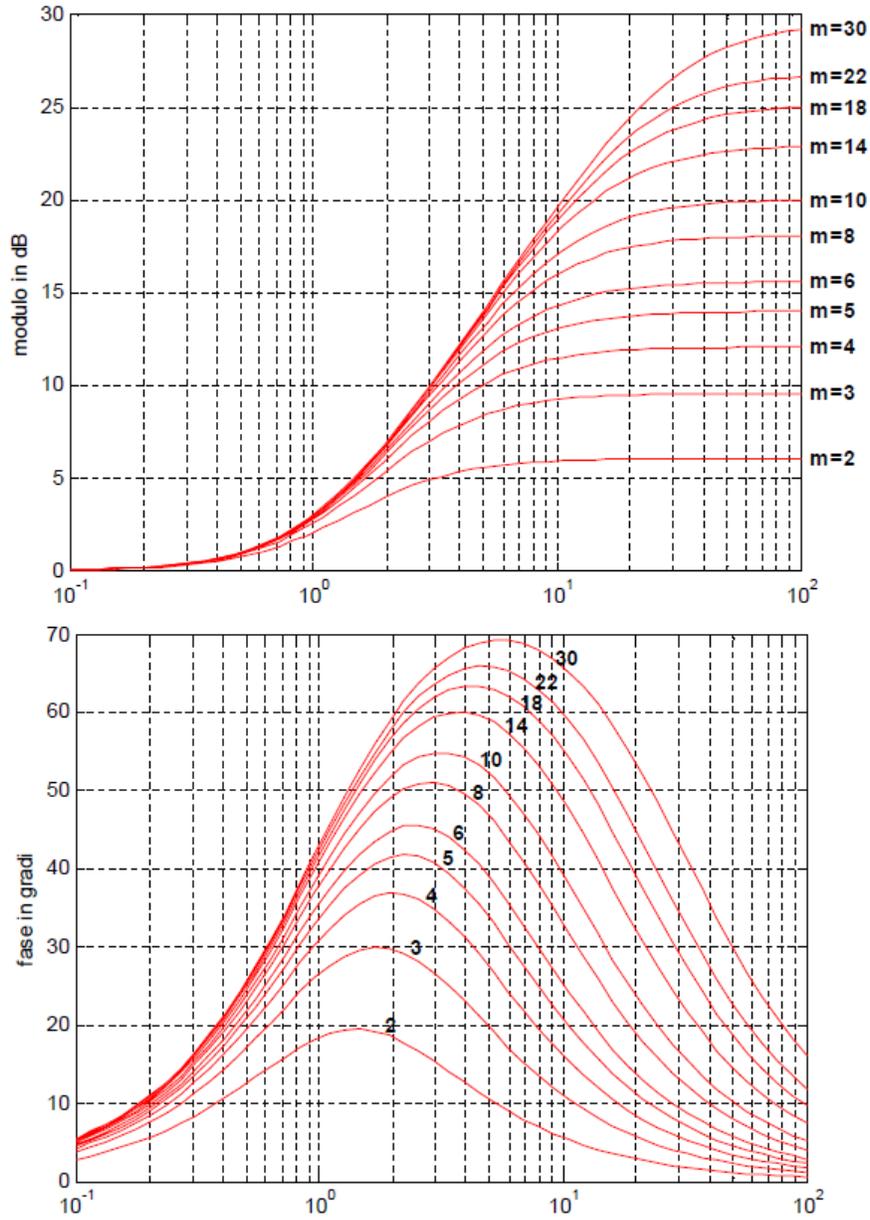


Figura 5.25 - Diagrammi universali di una rete anticipatrice,  $\tau = 1$

Dunque la rete anticipatrice dà un contributo trascurabile fino a  $\omega = 1/\tau$ ; quindi sale di 20dB/dec tra  $1/\tau$  e  $m/\tau$  per poi tornare a dare un contributo costante per pulsazioni maggiori di  $m/\tau$ . Più grande è il valore di  $m$ , più largo sarà l'intervallo  $[1/\tau, m/\tau]$  entro cui le ampiezze salgono, e

maggiore sarà il contributo costante alle alte frequenze. Per quel che riguarda il diagramma di Bode delle fasi, la rete anticipatrice darà un contributo trascurabile per pulsazioni inferiori a  $0.1/\tau$  e per pulsazioni maggiori di  $10m/\tau$ . All'interno di questo range di pulsazioni, la fase crescerà fino a un massimo per poi riabbassarsi (andamento a campana), con il massimo comunque inferiore a  $\pi/2$ . Più grande è il valore di  $m$ , più largo sarà l'intervallo  $[1/\tau, m/\tau]$  entro cui le fasi hanno il massimo, e maggiore sarà tale massimo. I diagrammi universali permettono di prevedere l'andamento dei diagrammi di Bode al variare del parametro  $m$ .

Vediamo come una tale rete anticipatrice aiuta ad aumentare il margine di fase. In altri termini, vediamo come settare i parametri di controllo  $\tau$  e  $m$  per raggiungere il nostro scopo. Come primo passo andiamo a settare il parametro  $\tau$  come

$$\tau = \frac{1}{\bar{\omega}}, \quad |W_{AP}(j\bar{\omega})|_{dB} = 0dB$$

in questo modo andiamo a modificare minimamente il diagramma delle ampiezze per pulsazioni inferiori a quella di attraversamento a 0dB delle ampiezze, mentre le fasi hanno iniziato a modificarsi da  $\omega = 0.1/\tau = 0.1\bar{\omega}$ . Quindi, scegliamo il parametro  $m$  in modo da avere l'aumento di fase richiesto dalla specifica di controllo. Andiamo a leggere tale quantità dai diagrammi universali in corrispondenza della pulsaione  $1/\tau = 1$ .

## 5.4 Il criterio di Routh per sistemi in controreazione unitaria

Ovviamente, il Criterio di Routh resta un'alternativa al Criterio di Nyquist, proprio perché più generale. La sua applicazione, però, sottende la costruzione del polinomio al denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso. A tale scopo si faccia riferimento allo schema di Figura 5.3 con il feedback a controreazione unitaria (si è già visto che non è una perdita di generalità).

$$W_{CH}(s) = \frac{W_{AP}(s)}{1 + W_{AP}(s)} = \frac{Num_{AP}(s)}{Den_{AP}(s) + Num_{AP}(s)}$$

da cui il polinomio al denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso è:

$$d_{CH}(s) = Den_{AP}(s) + Num_{AP}(s)$$

**Esempio.** Consideriamo il sistema a controreazione unitaria con la funzione di trasferimento in catena aperta pari a

$$W_{AP} = \frac{K(1-s)}{s(1+10s)}$$

La funzione di trasferimento in catena chiusa avrà il seguente denominatore:

$$d_{CH}(s) = 10s^2 + (1-K)s + K$$

Applicando il Criterio di Routh:

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 10 & K \\ 1 & 1-K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Da cui, per avere solo permanenze di segno in prima colonna deve essere

$$0 < K < 1$$

Il sistema è a stabilità regolare, perché per valori troppo grandi del guadagno  $K$  si perde la stabilità.

## 6 Specifiche di controllo a controreazione per sistemi SISO

In questa sezione sono discusse quali sono le specifiche di controllo maggiormente richieste e le tecniche per realizzarle per sistemi a controreazione. La teoria si sviluppa per sistemi lineari stazionari a tempo continuo e, per semplicità di trattazione, ci si limita al caso di sistemi Single Input Single Output (SISO).

Fermo restando la specifica sulla stabilità, di cui si è ampiamente parlato nella sezione precedente, altre importanti specifiche sono la **fedeltà di risposta** e la **reiezione dei disturbi**.

### 6.1 Fedeltà di risposta

La fedeltà di risposta riguarda la necessità di riprodurre in uscita un segnale che sia una replica (più o meno) esatta di un segnale desiderato. Generalmente questo tipo di problema non ha soluzione, a causa della complessità del problema. Per questo motivo ci si accontenta di ottenere la fedeltà di risposta rispetto a determinate caratteristiche dell'uscita. Nei prossimi paragrafi si approfondirà la questione per le risposte rispetto a specifici segnali di ingresso. Consideriamo il sistema a controreazione descritto nella Figura 5.1. Ipotizziamo di poter scrivere la funzione di trasferimento a ciclo aperto come:

$$W_{AP}(s) = C(s)F(s) = KG(s)$$

con il guadagno di Bode in catena aperta  $K$  che gioca il ruolo del parametro di controllo. Ad esempio si può pensare a  $C(s) = K$ , ossia a un sistema di controllo realizzato da un semplice guadagno  $K$ . Quindi, la funzione di trasferimento a ciclo chiuso diventa:

$$W_{CH}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Se ipotizziamo che la funzione di trasferimento del trasduttore sia anch'essa un semplice guadagno  $H(s) = H$ , avremo, al crescere del guadagno in catena aperta  $K$ :

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} W_{CH}(s) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{KG(s)}{1 + KHG(s)} = \frac{1}{H}$$

Per cui, al crescere del guadagno in catena aperta, l'uscita forzata tende ad essere una replica dell'ingresso moltiplicato per la costante  $1/H$ . Se si riuscisse a settare il guadagno di trasduzione a piacimento, aumentando *ad libitum* il guadagno in catena aperta, la risposta forzata del sistema sarebbe esattamente proporzionale all'ingresso desiderato (e non solo a regime), qualunque esso sia. Questo esempio sottolinea i vantaggi dell'uso del feedback, ma al tempo stesso non deve essere fuorviante: nella sezione precedente abbiamo visto come aumentare troppo il guadagno in catena aperta fa perdere la stabilità dei sistemi a stabilità regolare, per cui la scelta di  $K$  sarà la risultante del giusto compromesso, come vedremo nei paragrafi successivi.

#### 6.1.1 Fedeltà di risposta a ingressi canonici di tipo $k$

Focalizziamo l'attenzione sulla risposta a regime permanente (dunque, si stanno implicitamente considerando i sistemi asintoticamente stabili): lo studio è semplificato dal fatto che l'uscita a regime non dipende dalle condizioni iniziali. Inoltre, per classi particolari di segnali (ingressi costanti,

rampe lineari, rampe polinomiali, esponenziali, armoniche) l'uscita a regime si sa calcolare abbastanza facilmente, e questo semplifica notevolmente i conti.

In particolare, consideriamo i seguenti ingressi polinomiali di ordine  $k$  (anche detti **canonici di tipo  $k$** ):

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}$$

Abbiamo già visto nel Paragrafo 4 come la risposta a regime permanente a un tale ingresso polinomiale sia a sua volta un polinomio generico, del tipo

$$y_{\text{reg}}(t) = C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_{k-1}t + C_k$$

Per calcolare i valori dei coefficienti  $C_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , consideriamo la definizione di risposta a regime permanente

$$y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) \frac{\tau^k}{k!} d\tau = \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^k}{k!} d\theta$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene facilmente che:

$$C_k = \lim_{t \rightarrow 0} y_{\text{reg}}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^k}{k!} d\theta = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta^k d\theta$$

$$C_{k-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy_{\text{reg}}(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^{k-1}}{(k-1)!} d\theta = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta^{k-1} d\theta$$

e così via generalizzando:

$$C_j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{k-j} y_{\text{reg}}(t)}{dt^{k-j}} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^j}{j!} d\theta = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta^j d\theta$$

fino a

$$C_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{k-1} y_{\text{reg}}(t)}{dt^{k-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) (t-\theta) d\theta = - \int_0^{+\infty} W(\theta) \theta d\theta$$

$$C_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k y_{\text{reg}}(t)}{dt^k} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta = \int_0^{+\infty} W(\theta) d\theta$$

Ragionando a ritroso, è possibile associare questi coefficienti alla trasformata di Laplace della funzione di trasferimento:

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} W(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[W(t)] = W(s=0)$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} W(t) e^{-st} dt = \left. \frac{dW(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

e, generalizzando

$$C_j = \left. \frac{1}{j!} \frac{d^j W(s)}{ds^j} \right|_{s=0}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Ossia i coefficienti  $C_j$  sono i coefficienti dello sviluppo di Taylor della funzione di trasferimento  $W(s)$  nell'origine:

$$W(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j W(s)}{ds^j} \right|_{s=0} s^j = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j s^j$$

Applichiamo queste regole al caso che ci interessa, ossia alla fedeltà di risposta per ingressi canonici di tipo  $k$ , relativamente al regime. Sia  $y(t)$  l'uscita di un sistema lineare stazionario a tempo continuo. Tale sistema si dice **di tipo**  $k$  se l'errore a regime permanente all'ingresso canonico di tipo  $k$ , ossia alla rampa polinomiale  $u(t) = t^k/k!$  differisce dall'uscita desiderata

$$y_{\text{des}}(t) = K_d \frac{t^k}{k!}$$

per una quantità costante e diversa da zero. Se consideriamo il *sistema d'errore* in cui l'uscita è l'errore, ossia la differenza tra l'uscita desiderata e l'uscita del sistema

$$e(t) = y_{\text{des}}(t) - y_{\text{reg}}(t) = C_0^e \frac{t^k}{k!} + C_1^e \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_{k-1}^e t + C_k^e$$

da cui avremo che il sistema sarà di tipo  $k$  se

$$\begin{aligned} C_0^e &= C_1^e = \dots = C_{k-2}^e = C_{k-1}^e = 0 \\ C_k^e &\neq 0 \end{aligned}$$

il che ci porta a dire che la funzione di trasferimento  $W_e(s)$  del sistema d'errore deve avere uno zero di molteplicità  $k$  nell'origine:

$$W_e(s) = \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e s^j = s^k \cdot \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e s^{j-k}$$

In tal caso l'errore a regime vale proprio

$$C_k^e = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k W_e(s)}{ds^k} \right|_{s=0}$$

Inoltre per un sistema di tipo  $k$ , l'errore a regime per ingressi canonici di ordine  $j < k$  è pari a zero, perché i coefficienti

$$C_0^e, C_1^e, \dots, C_j^e, \quad j < k$$

sono tutti nulli.

Adesso vediamo come si ripercuotono queste informazioni nel caso in cui il sistema di tipo  $k$  sia il sistema a ciclo chiuso di Figura 5.1. A tale scopo, ipotizziamo che il sistema di trasduzione in feedback sia il seguente sistema istantaneo

$$H(s) = \frac{1}{K_d}$$

Allora, la funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso sarà:

$$W_{\text{CH}}(s) = \frac{W_{\text{AP}}(s)}{1 + W_{\text{AP}}(s)/K_d} = \frac{K_d W_{\text{AP}}(s)}{K_d + W_{\text{AP}}(s)}$$

e quella del sistema d'errore sarà:

$$W_e(s) = K_d - \frac{K_d W_{AP}(s)}{K_d + W_{AP}(s)} = \frac{K_d^2}{K_d + W_{AP}(s)}$$

Se distinguiamo numeratore e denominatore della funzione di trasferimento in catena aperta  $W_{AP}(s) = N_{AP}(s)/D_{AP}(s)$  avremo:

$$W_e(s) = K_d^2 \frac{D_{AP}(s)}{K_d D_{AP}(s) + N_{AP}(s)}$$

Quindi, la funzione di trasferimento del sistema d'errore ha  $k$  zeri nell'origine se il denominatore della funzione di trasferimento in catena aperta ha  $k$  radici nell'origine, ossia se la funzione di trasferimento a ciclo aperto ha  $k$  poli nell'origine.

Riassumendo: *Un sistema a controreazione come quello descritto in Figura 5.1, è un sistema di tipo  $k$  (ossia presenta errore nullo a regime rispetto a un ingresso canonico di tipo  $k$  e all'uscita desiderata  $y_{des}(t) = K_d t^k / k!$ ) se la funzione di trasduzione in feedback è  $H(s) = 1/K_d$  e ci sono  $k$  poli in zero in catena aperta.*

Per calcolare l'errore a regime per sistemi di tipo  $k$ , distinguiamo i seguenti due casi. A tale scopo definiamo  $K_{AP}$  il guadagno di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta.

- Sistema di tipo  $k = 0$ . Non c'è bisogno di avere poli nell'origine. In tal caso l'errore a regime è

$$C_0^e = W_e(s=0) = \frac{K_d^2}{K_d + K_{AP}}$$

- Sistema di tipo  $k > 0$ . Ci sono  $k$  poli nell'origine in catena aperta. Dalla formula

$$W_e(s) = s^k \cdot \sum_{j=k}^{+\infty} C_j^e s^{j-k} = s^k (C_k^e + C_{k+1}^e s + \dots)$$

avremo

$$C_k^e = \left. \frac{W_e(s)}{s^k} \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2}{s^k K_d + s^k W_{AP}(s)} = \frac{K_d^2}{K_{AP}}$$

In entrambi i casi, dunque, per ridurre l'errore a regime nei sistemi di tipo  $k$  bisogna aumentare il guadagno di Bode in catena aperta. Operazione che va fatta con attenzione perché aumentare troppo il guadagno in catena aperta può portare a instabilità.

## 6.2 Reiezione di disturbi

Supponiamo di avere un sistema a controreazione, in cui il disturbo  $z(t)$  intervenga come indicato in Figura 6.1.

Calcoliamo la funzione di trasferimento disturbo/uscita (ossia consideriamo il disturbo come l'ingresso del sistema, ponendo l'ingresso vero pari a zero):

$$Y(s) = Z(s) - W_{AP}(s)H(s)Y(s) \quad \Longrightarrow \quad W_z(s) = \frac{1}{1 + W_{AP}(s)H(s)}$$

Analogamente a quanto visto per la fedeltà di risposta, se ipotizziamo di far crescere indefinitamente il guadagno in catena aperta (ossia il guadagno di Bode della  $W_{AP}(s)$ ), la funzione di trasferimento

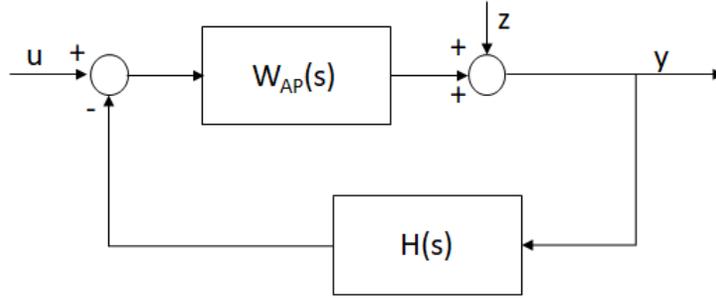


Figura 6.1 - Disturbo a valle della funzione di trasferimento in catena aperta

del disturbo va a zero e si avrebbe perfetta reiezione del disturbo. Più semplicemente, ciò che chiediamo è che la risposta a regime permanente a un disturbo costante sia nulla (il sistema in questo caso si dice **astatico**) oppure costante (il sistema si dice **statico**). Nel primo caso, in accordo con quanto visto al paragrafo precedente, la funzione di trasferimento  $W_z(s)$  deve avere uno zero nell'origine. Definendo  $W_{AP}(s) = N_{AP}(s)/D_{AP}(s)$ , avremo che

$$W_z(s) = \frac{D_{AP}(s)}{D_{AP}(s) + N_{AP}(s)H(s)}$$

da cui segue che l'astaticità richiede la presenza di almeno un polo nella funzione di trasferimento in catena aperta. In caso contrario, l'errore a regime sarà pari a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_z(s) = \frac{1}{1 + K_{AP}K_H}$$

Dunque, al crescere del guadagno di Bode in catena aperta, l'errore a regime sul disturbo può rendersi piccolo a piacere (ancora una volta ricordando che il guadagno  $K_{AP}$  non può essere aumentato *ad libitum* senza incorrere in problemi di stabilità).

Se, invece, il disturbo si somma a una variabile intermedia in catena aperta come nella Figura 6.2, la funzione di trasferimento dell'errore diventa

$$Y(s) = W_2(s)(Z(s) - W_1(s)H(s)Y(s)) \quad \implies \quad W_z(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_1(s)H(s)}$$

In questo caso, è la funzione di trasferimento a monte del disturbo (cioè la  $W_1(s)$ ) che determina le proprietà della funzione di trasferimento del disturbo (e per fortuna, dato che è la parte del sistema che include il regolatore!). Ad esempio, è il guadagno di Bode della  $W_1(s)$  che determina la reiezione perfetta del disturbo quando cresce indefinitamente. Se, più semplicemente, chiediamo che la risposta a regime permanente a un disturbo costante sia nulla (il sistema è **astatico**), per garantire che la funzione di trasferimento  $W_z(s)$  abbia uno zero nell'origine, denotando  $W_1(s) = N_1(s)/D_1(s)$ , avremo che

$$W_z(s) = \frac{D_1(s)W_2(s)}{D_1(s) + W_2(s)N_1(s)H(s)}$$

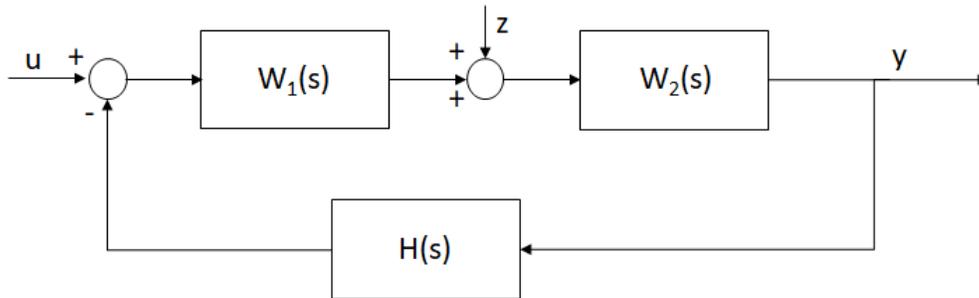


Figura 6.2 - Disturbo in catena aperta interno alla funzione di trasferimento

da cui segue che la  $W_1(s)$  deve avere un polo nell'origine. In caso contrario, l'errore a regime sarà pari a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_z(s) = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2 K_H}$$

se  $W_2(s)$  non ha poli nell'origine, oppure

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_z(s) = \frac{1}{K_1 K_H}$$

nel caso in cui  $W_2(s)$  ne abbia. Riassumendo, in accordo alla configurazione di Figura 6.2, il sistema è astatico se la  $W_1(s)$  ha almeno un polo nell'origine; altrimenti, il sistema è statico e l'errore a regime per disturbo costante è costante, e può essere reso piccolo a piacere andando ad aumentare il guadagno di Bode  $K_1$  (anche in questo caso, il guadagno  $K_1$  non può essere aumentato *ad libitum* senza incorrere in problemi di stabilità).

### 6.3 Specifiche sulla risposta al transitorio: risposta al gradino

Anche per quel che la risposta al transitorio, le specifiche di progetto riguardano generalmente determinati aspetti della risposta transitoria a segnali di riferimento. In particolare si fa riferimento alla risposta al gradino a partire dallo stato zero. Analogamente a quanto visto per la fedeltà di risposta, si suppone che il sistema sia asintoticamente stabile, per cui la risposta al regime al gradino sarà essa stessa un gradino, e la risposta transitoria al gradino descrive il *modo* in cui il sistema si avvicina al regime. Un ruolo fondamentale lo svolgono gli autovalori (supposti tutti a parte reale negativa).

- Nel caso in cui gli autovalori siano tutti reali, la risposta a regime al gradino si raggiunge senza oscillazioni, né sovraelongazioni (l'ipotesi è che il sistema parta dall'origine).
- Nel caso in cui ci siano autovalori complessi coniugati, accade che il regime si raggiunga a fronte di oscillazioni più o meno marcate.

I parametri che caratterizzano il transitorio della risposta al gradino sono i seguenti, si faccia riferimento alla Figura 6.3 dove la risposta a regime è normalizzata a 1.

- 1) **Tempo di salita**  $t_s$ : è il tempo necessario per raggiungere per la prima volta il valore di regime
- 2) **Sovraelongazione**  $s$ : è il rapporto tra il massimo valore raggiunto dalla risposta e la risposta a regime
- 3) **Tempo di assestamento**  $t_a$ : è il tempo necessario affinché la risposta transitoria abbia uno scostamento dal valore di regime definitivamente inferiore a una quantità  $\varepsilon$  scelta

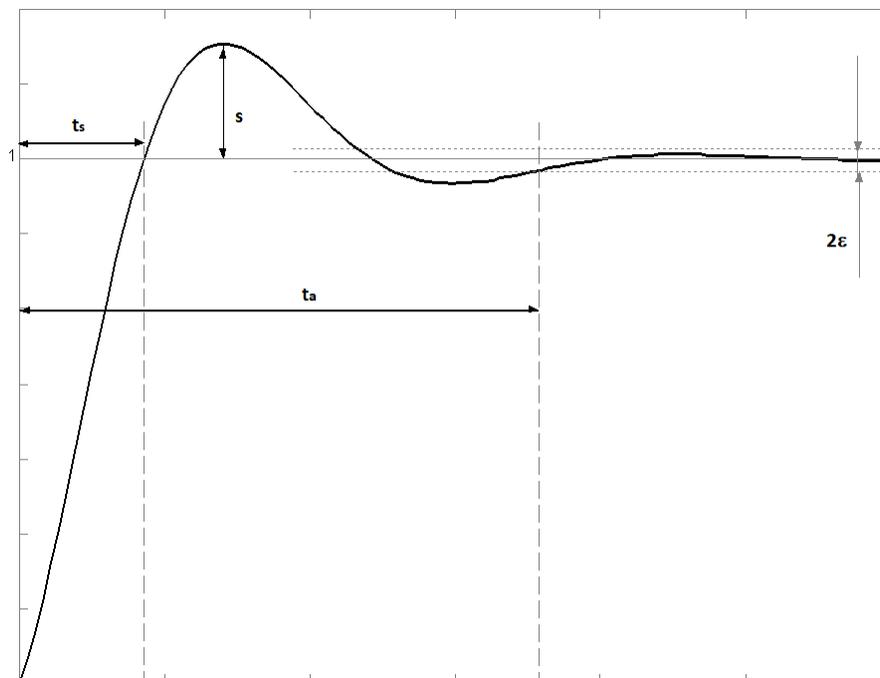


Figura 6.3 - Risposta transitoria al gradino, normalizzata a 1

Tali parametri possono essere messi in relazione con i seguenti parametri strettamente legati alla funzione di trasferimento e ai suoi diagrammi di Bode (si faccia riferimento alla Figura 6.4):

- **Modulo alla risonanza**  $M_r$ : è il rapporto tra il massimo valore del modulo della  $W(j\omega)$  normalizzato al modulo di  $W(j0)$
- **Banda passante**  $B_3$  è la pulsazione oltre la quale il modulo della  $W(j\omega)$  viene attenuato di -3dB rispetto al valore del modulo di  $W(j0)$

Come osservazione preliminare si noti che modulo alla risonanza e banda passante hanno senso per funzioni di trasferimento che *non* hanno poli nell'origine (altrimenti  $W(j0)$  avrebbe modulo infinito). Questa ipotesi *non* è una limitazione: stiamo considerando sistemi asintoticamente stabili, dunque le loro funzioni di trasferimento non hanno poli a parte reale maggiore o uguale a zero. A scanso di equivoci, nella fedeltà di risposta o nella reiezione ai disturbi si richiede che la funzione

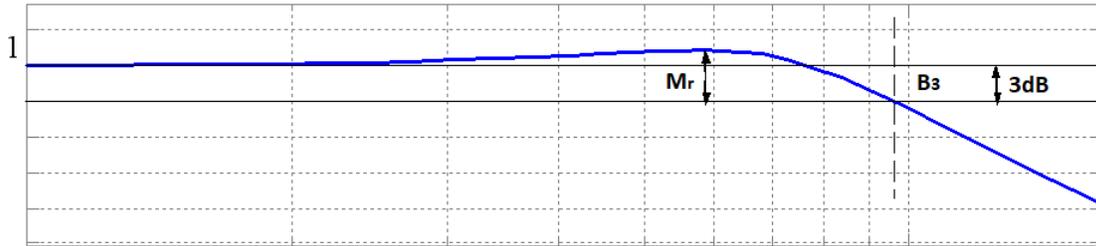


Figura 6.4 - Modulo alla risonanza e banda passante

di trasferimento in catena aperta abbia poli nell'origine, mentre qui si focalizza l'attenzione sulla funzione di trasferimento a ciclo chiuso!

Riguardo a modulo alla risonanza e banda passante valgono le seguenti leggi empiriche che le legano ai parametri del transitorio della risposta al gradino e alla pulsazione di attraversamento a 0dB della funzione di trasferimento in catena aperta  $\omega_t$ :

$$1 + s \simeq 0.85M_r \quad B_3 \cdot t_s \simeq 3 \quad B_3 > \omega_t$$

## 6.4 Regolatori PID

I regolatori PID devono la loro vastissima applicazione nel settore dell'elettronica alla loro facile realizzazione e alle buone prestazioni che garantiscono, oltre che ad una serie di procedimenti empirici di regolazione dei dispositivi, che consentono il loro "settaggio" anche a chi non è particolarmente esperto del settore dei controlli. Prendono il nome dalla triplice (in generale) azione di controllo che determinano sul loro ingresso: Proporzionale, Integratrice e Derivatrice. Un generico schema di controllo che trova nei PID una valida applicazione è quello di Figura 5.1. Da quanto visto nei paragrafi precedenti, immaginando di voler garantire fedeltà di risposta in uscita, almeno per ingressi di riferimento costanti in ingresso, è necessario fissare la controreazione  $H(s) = \frac{1}{K_d}$ , con  $K_d$  coefficiente di proporzionalità desiderato tra l'ingresso di riferimento  $u(t)$  e l'uscita desiderata  $y(t) = K_d u(t)$ , e porre un polo nell'origine in catena aperta (a meno che non ce l'abbia già la funzione di trasferimento del sistema da controllare), il che, tra l'altro, garantisce l'astaticità del sistema rispetto ai disturbi costanti. Il guadagno del controllore si sceglie come compromesso tra la necessità di ridurre l'errore a regime ( $K$  grande) e quella di garantire margini di stabilità (generalmente margine di guadagno) adeguati a ciclo chiuso ( $K$  piccolo). Per migliorare le prestazioni di stabilità (il margine di fase in questo caso) si fa ricorso a reti compensatrici anticipatrici del tipo:

$$\frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}, \quad m > 1,$$

per cui il controllore è dato da:

$$C(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}, \quad m > 1.$$

Questo tipo di azione di controllo (sintesi per tentativi, come abbiamo visto) riesce a soddisfare i requisiti minimi di specifiche, e la sintesi per tentativi permette di assegnare i parametri  $K$ ,  $\tau$  e  $m$ .

I controllori PID sono una versione *customizzata* della sintesi per tentativi. Supponendo di scegliere  $m$  elevato, il denominatore della rete compensatrice può approssimarsi con 1, per cui:

$$C(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s} = K\tau \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right), \quad K_P = K\tau, \quad T_I = \tau$$

Un controllore di questo tipo esplica le sole azioni Proporzionali e Integrali (**controllore PI**). Andando a scrivere, infatti, le relazioni nel dominio del tempo tra la grandezza in ingresso  $e(t)$  ed in uscita  $u(t)$  al regolatore, si ottiene:

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

#### 6.4.1 Regolatori PI per sistemi di cui si conosce la funzione di trasferimento

Una tecnica per assegnare i guadagni delle azioni proporzionale ed integrale è la seguente e si basa sulla conoscenza della funzione di trasferimento del sistema in catena aperta  $W_{AP}(s)$ . Si noti, innanzitutto, che l'azione integrale contribuisce in modo negativo alle fasi, in maniera tanto più accentuata quanto più ci si allontana dalla pulsazione di  $\frac{1}{\tau}$ , si veda la Figura 6.5. In particolare, si può facilmente verificare che solo oltre la pulsazione di  $10/\tau$  si ha una diminuzione di circa  $6^\circ$ . E' bene sottolineare che Un contributo negativo, in generale, è da evitare perché può ridurre il margine di fase (fino a far perdere la stabilità del sistema).

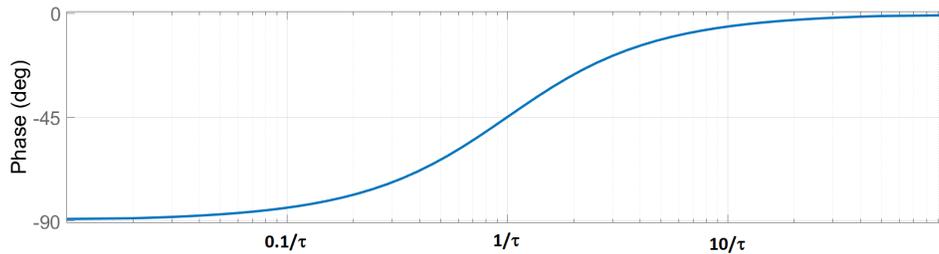


Figura 6.5 - Diagramma di Bode della fase di un regolatore PI

Vediamo un algoritmo per settare i parametri del regolatore PI in modo da avere un margine di fase desiderato, supponendo che abbia le fasi monotonamente decrescenti al crescere della pulsazione  $\omega$ .

- 1) Dato un margine di fase  $m_{\varphi,des}$  desiderato, dal diagramma di Bode delle fasi del sistema da controllare individuiamo la pulsazione  $\omega_0$  per cui si ha una fase pari a

$$\angle W_{AP}(j\omega_0) = -180^\circ + m_{\varphi,des} + 6^\circ$$

- 2) Supponendo che  $\omega_0$  sia la pulsazione di attraversamento a 0dB, se andiamo a porre

$$\frac{10}{\tau} = \frac{10}{T_I} = \omega_0 \quad \implies \quad T_I = \frac{10}{\omega_0}$$

avremmo che il regolatore darebbe un contributo negativo alle fasi di circa  $6^\circ$  per cui si avrebbe un margine di fase uguale a quello desiderato:

$$m_\varphi = \angle W_{AP}(j\omega_0) + 180^\circ - 6^\circ = -180^\circ + m_{\varphi,des} + 6^\circ + 180^\circ - 6^\circ = m_{\varphi,des}$$

- 3) A questo punto si scelgono i parametri del regolatore PI in modo che la pulsazione di attraversamento a 0dB sia effettivamente pari a  $\omega_0$ :

$$\frac{|K| \cdot |1 + j\tau\omega_0| \cdot |W_{AP}(j\omega_0)|}{|j\omega_0|} = \frac{K\tau \cdot |1 + j10| \cdot |W_{AP}(j\omega_0)|}{10} = K_P \sqrt{1.01} \cdot |W_{AP}(j\omega_0)| = 1$$

da cui

$$K_P \simeq \frac{1}{|W_{AP}(j\omega_0)|}, \quad T_I = \frac{10}{\omega_0}$$

Vediamo un esempio:

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{k_F}{s(1 + \frac{s}{2})} \quad k_F = 5$$

Le specifiche richieste sono, per il sistema a ciclo chiuso:

- sistema di tipo  $k = 2$  con errore a regime  $< 0.4$  e  $K_d = 1$ ;
- stabilità asintotica con margine di fase  $m_\varphi > 22^\circ$

Perché il sistema sia di tipo 2, deve avere 2 poli nell'origine: uno polo è già nella funzione di trasferimento da controllare, per cui è necessario aggiungere un polo nel controllore. A tale scopo immaginiamo un regolatore PI del tipo

$$C(s) = K \frac{1 + \tau s}{s}$$

Per garantire un errore a regime  $< 0.4$ , dato  $K$  il guadagno del controllore, dovrà accadere che

$$\frac{K_d^2}{K k_F} < 0.4 \quad \implies \quad K > \frac{1}{2} = 0.5$$

Per il momento teniamo questa condizione ( $K > 0.5$ ) come una specifica da verificare *a posteriori*. Ora, applichiamo il ragionamento per i controllori PI. Dal primo passo dell'algoritmo, relativamente alla funzione di trasferimento  $F(s)$  si richiede di cercare la pulsazione  $\omega_0$  tale per cui

$$\angle F(j\omega_0) = -180^\circ + 22^\circ + 6^\circ = -152^\circ$$

Dai diagrammi di Bode della fase di Figura 6.6, si ottiene che tale pulsazione vale  $\omega_0 \simeq 3.74 \text{rad/sec}$ . Quindi, dal secondo passo, fissiamo:

$$T_I = \frac{10}{\omega_0} = 2.67$$

Infine, per il passo tre fissiamo

$$K_P = \frac{1}{|F(j\omega_0)|}$$

Dai diagrammi di Bode delle ampiezze avremo che

$$|F(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log |F(j\omega_0)| \simeq -4.01 \text{dB} \quad \Rightarrow \quad |F(j\omega_0)| \simeq 10^{-4.01/20} \simeq 0.63$$

Quindi:

$$K_P = \frac{1}{0.63} \simeq 1.59 \quad T_I = 2.67$$

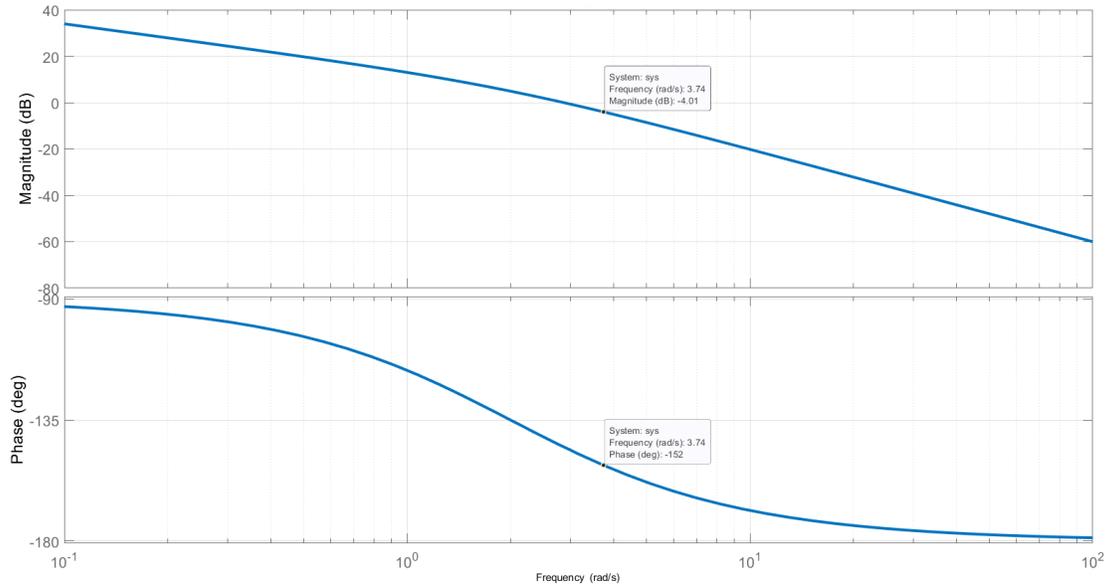


Figura 6.6 - Diagramma di Bode di  $F(j\omega)$

Andando a ritroso notiamo che

$$K = \frac{K_P}{T_I} = \frac{1.59}{2.67} = 0.60 > 0.5$$

soddisfa anche la specifica di regime. Cosa si potrebbe fare se la specifica a regime non fosse stata soddisfatta a causa della necessità di un guadagno in catena aperta troppo basso? Da quanto visto un controllore PI puro va incontro all'inconveniente strutturale che si può migliorare il margine di fase solo a scapito di una diminuzione della pulsazione di taglio, poichè non c'è possibilità di aumentare le fasi. Per renderlo più versatile sarebbe necessario l'uso di una rete anticipatrice che aumentasse le fasi. Un tale obiettivo si ottiene aggiungendo la nota rete anticipatrice:

$$C(s) = \frac{K(1 + \tau_I s)}{s} \cdot \frac{1 + \tau_D s}{1 + \frac{\tau_D}{m} s}, \quad m > 1.$$

Anche in questo caso, se si realizza la rete anticipatrice con la sola azione derivatrice spostando il polo alle alte frequenze ( $m \gg 1$ ), il regolatore PID completo presenta le tre caratteristiche di guadagno proporzionale, integrale e derivativo:

$$C(s) = \frac{K(1 + \tau_I s)(1 + \tau_D s)}{s} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

con

$$K_P = K(\tau_I + \tau_D), \quad T_I = \tau_I + \tau_D, \quad T_D = \frac{\tau_I \tau_D}{\tau_I + \tau_D}$$

Questo regolatore, infatti, include le tre azioni proporzionale, integrale e derivativa sul suo ingresso:

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de}{dt} \right)$$

E' bene sottolineare come un regolatore derivativo puro non è fisicamente realizzabile, dato che consiste in un rapporto di polinomi improprio (il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore): l'azione derivativa esce fuori come approssimazione nel caso in cui il polo della rete anticipatrice viene spostato alle alte frequenze.

Nel prossimo paragrafo vedremo delle regole empiriche per assegnare i parametri  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$  al regolatore. Il vantaggio di queste regole è che non necessitano della conoscenza della funzione di trasferimento del sistema da controllare.

#### 6.4.2 Regolatori PID per sistemi di cui non si conosce la funzione di trasferimento

Se non si conosce la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta, ci si affida a metodi empirici per l'assegnazione dei guadagni del regolatore PID che abbia la classica struttura:

$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

I metodi di **Ziegler-Nichols** sono i più importanti, e maggiormente usati da sempre. Di seguito ne riportiamo un paio.

**Calibrazione ad anello chiuso** - Il metodo di calibrazione ad anello chiuso presuppone che il sistema da controllare sia a stabilità regolare (ossia che esista un valore critico del guadagno di Bode in catena aperta oltre il quale si perda la stabilità). Esso si basa sui seguenti passi:

- i) consideriamo il sistema in catena aperta controllato da un semplice guadagno  $K$  che venga fatto variare a piacimento;
- ii) si stima la *pulsazione critica*, in corrispondenza della quale si innescano oscillazioni sostenute sul sistema a ciclo chiuso (ossia si perde la stabilità): questa operazione, che si effettua aumentando il guadagno del regolatore fino a raggiungere il valore critico  $K^*$ , equivale a cercare la pulsazione  $\omega^*$  in corrispondenza della quale le fasi valgono esattamente  $-\pi$ ;

A questo punto ci sono leggi empiriche che, a seconda del tipo di controllore adottato stabiliscono come settare i parametri del regolatore P, PI o PID. Ad esempio, nel caso di un PI, la scelta sarà:

$$K_P = 0.45K^*, \quad T_I = \frac{\pi}{0.6\omega^*}$$

mentre, nel caso di un regolatore PID, la scelta sarà:

$$K_P = 0.6K^*, \quad T_I = \frac{\pi}{\omega^*}, \quad T_D = \frac{0.25\pi}{\omega^*}$$

Si noti che la funzione di trasferimento del regolatore PID diventa:

$$C(s) = 0.6K^* \left( 1 + \frac{\omega^*}{\pi s} + \frac{0.25\pi}{\omega^*} s \right) = \frac{0.6K^*}{\omega^* \pi} \cdot \frac{0.25\pi^2 s^2 + \pi \omega^* s + (\omega^*)^2}{s} = \frac{0.6K^*}{\omega^* \pi} \cdot \frac{(0.5\pi s + \omega^*)^2}{s}$$

da cui, in forma canonica

$$C(s) = \frac{0.6K^*\omega^*}{\pi} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0.5\pi}{\omega^*}s\right)^2}{s}$$

**Metodo di calibrazione ad anello aperto** - Il metodo di calibrazione ad anello aperto si basa sull'esistenza della risposta a regime al gradino in catena aperta, per cui l'ipotesi di lavoro è che il sistema ad anello aperto sia asintoticamente stabile. Una seconda ipotesi di lavoro è che la risposta al gradino sia di tipo sigmoide senza sovraelongazioni, il che presuppone che gli autovalori complessi coniugati non esistano, oppure che non diano apparenti oscillazioni. Dalla risposta al transitorio al gradino (in catena aperta) si individuano i seguenti parametri sulla base della seguente procedura:

- i) si individua il punto di flesso della risposta transitoria al gradino e se ne traccia la retta tangente;
- ii) questa retta staccherà un istante sull'asse dei tempi: sia esso  $L$ ;
- iii) la retta tangente intersecherà il *plateau* della risposta al gradino in un istante  $T_1$ , e definiremo  $T = T_1 - L$  questo secondo parametro.

A questo punto le leggi empiriche che, a seconda del tipo di controllore adottato stabiliscono come settare i parametri del regolatore P, PI o PID, sono:

$$K_P = 0.9 \frac{T}{L}, \quad T_I = \frac{L}{0.3}$$

mentre, nel caso di un regolatore PID, la scelta sarà:

$$K_P = 1.2 \frac{T}{L}, \quad T_I = 2L, \quad T_D = 0.5L$$

da cui, la funzione di trasferimento del regolatore PID diventa:

$$C(s) = \frac{1.2T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls\right) = \frac{1.2T}{2L^2} \cdot \frac{L^2s^2 + 2Ls + 1}{s} = \frac{0.6T}{L^2} \cdot \frac{(1 + Ls)^2}{s}$$

## 7 Motore in corrente continua

In questa sezione si applicano le nozioni di Teoria dei Sistemi e dei Controlli per costruire un modello lineare stazionario per un motore elettrico in corrente continua, e progettare una legge di controllo a controreazione.

Nel prosieguo, le grandezze vettoriali verranno indicate in **grassetto**.

### 7.1 Principio di funzionamento di un motore elettrico in corrente continua

Consideriamo una carica elettrica (di carica  $q$ ) in movimento (con velocità  $\mathbf{v}$ ), immersa in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ . Allora, la carica elettrica è soggetta a una forza  $\mathbf{F}$  (*legge di Lorenz*) descritta dalla formula

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Nel caso di un conduttore rettilineo lungo  $l$  percorso da una corrente uniforme  $I$ , immerso in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , la forza di Lorenz si declina con la seguente forza che agisce sul conduttore:

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

dove  $\mathbf{l}$  è il vettore (di intensità  $l$ ) che dà la direzione e il verso della corrente.

Ora, supponiamo di avere una spira rettangolare libera di ruotare attorno a un asse che passa per una sua mediana. E supponiamo che la spira sia percorsa da una corrente uniforme  $I$  e che sia immersa in un campo di induzione magnetica ortogonale all'asse di rotazione della spira. Supponiamo che la spira sia inizialmente complanare al piano che include l'asse di rotazione e l'induzione magnetica. Siano 1, 3 i lati paralleli all'asse di rotazione di lunghezza  $l$  e 2, 4 i lati ortogonali di lunghezza  $h$ . In questa situazione, la forza di Lorenz esercita una forza nulla sui lati 2 e 4 poiché  $\mathbf{B}$  è parallelo alle direzioni dei lati; al contrario, la forza di Lorenz esercita sui restanti due lati due forze uguali e contrarie (stessa intensità e direzione, ma verso opposto), di intensità massima  $IlB$  poiché  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{l}$  sono ortogonali. Come risultato abbiamo che la spira è soggetta a una coppia di intensità

$$\tau = IlBh$$

con  $h$  braccio della coppia. La spira, dunque, inizierà a ruotare. Ruotando, non cambia l'inclinazione dei lati 1 e 3 (sempre ortogonali a  $\mathbf{B}$ ), per cui la coppia di forze applicate ai due lati della spira non cambia; cambierà, però, il braccio della coppia che adesso vale  $h \cos(\theta)$ , con  $\theta$  angolo di rotazione, per cui il momento della coppia di forze applicato alla spira diventa:

$$\tau = IlBh \cos(\theta)$$

Inoltre, cambia l'inclinazione dei lati 2 e 4 rispetto a  $\mathbf{B}$ : si avranno altre due forze che agiscono sui lati 2 e 4, ma danno un contributo di rotazione nullo rispetto all'unico consentito, per cui non danno contributo al momento risultante. Quando la spira raggiunge la posizione di  $\theta = \pi/2$ , il momento è nullo, ma la spira supera quella posizione per inerzia (ha una velocità angolare non nulla) e il moto continua. Si noti come, oltre  $\pi/2$  il momento cambia segno e si oppone all'inerzia finché riesce ad invertire la rotazione della spira.

Di contro, una spira rotante immersa in un campo magnetico fa variare il flusso  $\phi$  di  $\mathbf{B}$  attraverso essa:

$$\phi = B \cdot S \cdot \sin(\theta) = Blh \sin(\theta)$$

dove  $S = l \cdot h$  è l'area della spira. Di conseguenza (*legge di Faraday*) si genera una forza controelettrica che si oppone alla variazione del flusso, di intensità:

$$f_e = -\frac{d\phi}{dt} = -Blh \cos(\theta) \dot{\theta} = -Blh\omega \cos(\theta)$$

## 7.2 Modello di un motore in corrente continua

In un motore in corrente continua distinguiamo una parte fissa, lo **statore**, responsabile della generazione del campo di induzione magnetica stazionario, e una parte mobile, il **rotore**, su cui sono avvolte più spire percorse da una *corrente di armatura*  $I_a$ . La risultante dei momenti applicati al rotore (integrando i contributi delle singole spire) produce una coppia di intensità proporzionale alla corrente di armatura:

$$\tau_m = K_m \cdot I_a$$

con  $K_m$  **costante di coppia** del motore il cui valore dipende dai parametri del motore, incluso il numero di spire dell'avvolgimento di armatura. Di contro, il circuito elettrico di armatura subisce la forza contro-elettromotrice data da

$$f_e = -K_e \omega_m$$

con  $K_e$  *costante di forza contro-elettromotrice*, uguale alla costante di coppia:

$$K_e = K_m$$

e  $\omega_m$  velocità angolare del giunto del rotore. In tal modo, modellando il circuito di armatura come un circuito  $RL$ , avremo una dinamica della parte elettrica del motore data da

$$\begin{cases} v_a(t) - L_a \dot{I}_a(t) - R_a I_a(t) + f_e(t) = 0 \\ \tau_m(t) = K_m I_a(t) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{I}_a(t) = -\frac{R_a}{L_a} I_a(t) - \frac{K_m}{L_a} \omega_m(t) + \frac{1}{L_a} v_a(t) \\ \tau_m(t) = K_m I_a(t) \end{cases}$$

con  $v_a$  la tensione applicata al circuito di armatura e  $L_a$  e  $R_a$  induttanza e resistenza del circuito di armatura.

Per quel che riguarda la dinamica della parte meccanica del motore, la coppia motrice in uscita al rotore sarà applicata a una serie di ingranaggi (*riduttore di velocità*) con lo scopo di variane la velocità angolare al carico,  $\omega_l$ , secondo lo schema (che prevede attrito senza slittamento tra i due ingranaggi):

$$\omega_m r = \omega_l \mathcal{R}$$

con  $r$  e  $\mathcal{R}$  i raggi dei due ingranaggi posti a contatto e  $\omega_o$  la velocità angolare in uscita al riduttore. Posto

$$N = \frac{\mathcal{R}}{r} = \frac{\omega_m}{\omega_l}$$

il *rapporto di trasmissione*, supponendo un perfetto accoppiamento senza perdita di potenza, avremo per la coppia di carico  $\tau_l$ :

$$P = \tau_m \omega_m = \tau_l \omega_l \implies \tau_l = \frac{\omega_m}{\omega_l} \tau_m = N \tau_m$$

Per scrivere le dinamiche della parte meccanica dobbiamo considerare anche le reazioni vincolari che si esercitano nei punti di contatto degli ingranaggi del riduttore di velocità. Nel caso dell'albero motore, posta  $f$  la forza di contatto, questa genererà una coppia  $f\mathcal{R}$  che si oppone al moto, per cui:

$$J_m \dot{\omega}_m(t) = \tau_m(t) - f r - \beta_m \omega_m(t)$$

con l'ultimo termine che tiene conto dell'attrito dinamico di rotazione. Per quel che riguarda il giunto di carico, la dinamica sarà:

$$J_l \dot{\omega}_l(t) = -\tau_l(t) + f \mathcal{R} - \beta_l \omega_l(t)$$

con il primo termine che tiene conto della coppia resistente dovuta al carico, la coppia  $f\mathcal{R}$  che trasmette il moto dall'albero motore, e l'ultimo termine che tiene conto dell'attrito dinamico di rotazione. Poiché  $\omega_l = \omega_m/N$ , avremo:

$$\frac{J_l}{N} \dot{\omega}_m(t) = -\tau_l(t) + f \mathcal{R} - \frac{\beta_l}{N} \omega_m(t)$$

da cui, calcolando la  $f$  dalla dinamica del giunto:

$$f = \frac{J_l}{N\mathcal{R}}\dot{\omega}_m(t) + \frac{1}{\mathcal{R}}\tau_l(t) + \frac{\beta_l}{N\mathcal{R}}\omega_m(t)$$

e sostituendola nella dinamica dell'albero motore:

$$J_m\dot{\omega}_m(t) = \tau_m(t) - \frac{rJ_l}{N\mathcal{R}}\dot{\omega}_m(t) - \frac{r}{\mathcal{R}}\tau_l(t) - \frac{r\beta_l}{N\mathcal{R}}\omega_m(t) - \beta_m\omega_m(t)$$

E, infine, tenendo conto che  $\tau_m = K_M I_a(t)$ :

$$\left(J_m + \frac{J_l}{N^2}\right)\dot{\omega}_m = -\left(\beta_m + \frac{\beta_l}{N^2}\right)\omega_m + K_m I_a(t) - \frac{1}{N}\tau_l(t)$$

Le due dinamiche, elettrica e meccanica, sono, dunque, accoppiate come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_a(t) = -\frac{R_a}{L_a}I_a(t) - \frac{K_m}{L_a}\omega_m(t) + \frac{1}{L_a}v_a(t) \\ \dot{\omega}_m = -\frac{\beta_{tot}}{J_{tot}}\omega_m + \frac{K_m}{J_{tot}}I_a(t) - \frac{1}{NJ_{tot}}\tau_l(t), \\ \tau_m(t) = K_m I_a(t) \\ \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \theta_l(t) = \frac{1}{N}\theta_m \end{array} \right. \quad J_{tot} = J_m + \frac{J_l}{N^2}, \quad \beta_{tot} = \beta_m + \frac{\beta_l}{N^2}$$

Denotando con:

$$x(t) = [I_a(t) \ \omega_m(t) \ \theta(t)]^T \in \mathbb{R}^3, \quad u(t) = v_a(t), \quad d(t) = \tau_l(t), \quad y(t) = \theta(t)$$

rispettivamente, lo stato del sistema, l'ingresso di controllo, il disturbo e l'uscita del sistema, avremo che il motore è descritto dal seguente modello lineare:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K_m/L_a & 0 \\ K_m/J_{tot} & -\beta_{tot}/J_{tot} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/(NJ_{tot}) \end{bmatrix} d(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1/N]x(t)$$

Applicando la trasformata di Laplace:

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_a + sL_a)I_a(s) = -K_m\Omega_m(s) + V_a(s) \\ (\beta_{tot} + sJ_{tot})\Omega_m(s) = K_m I_a(s) - \frac{1}{N}T_l(s) \\ \Theta_m(s) = \frac{1}{s}\Omega_m(s) \\ \Theta_l(s) = \frac{1}{N}\Theta_m(s) \end{array} \right.$$

da cui

$$\begin{cases} \Theta_l(s) = \frac{1}{N} \Theta_m(s) \\ \Theta_m(s) = \frac{1}{s} \Omega_m(s) \\ \Omega_m(s) = \frac{1}{\beta_{tot} + sJ_{tot}} \left( K_m I_a(s) - \frac{1}{N} T_l(s) \right) \\ I_a(s) = \frac{1}{R_a + sL_a} (V_a(s) - K_m \Omega_m(s)) \end{cases}$$

Queste relazioni si traducono nello schema a blocchi di Figura 7.1.

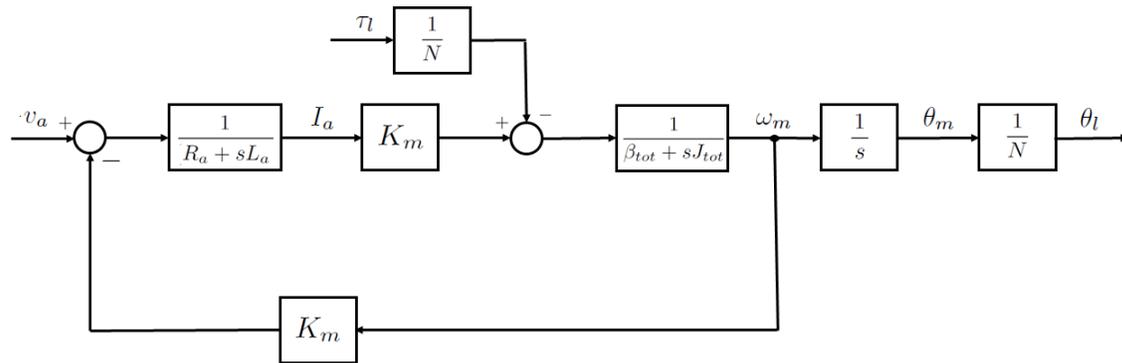


Figura 7.1 - Schema a blocchi di un motore in corrente continua

Si noti che il motore in corrente continua ha intrinsecamente un anello di retroazione interno, tuttavia ai fini del controllo lo schema sopra riportato è quello in catena aperta su cui non è stata effettuata ancora alcuna azione di controllo.

Trascurando il disturbo del carico sul giunto, la funzione di trasferimento tra la velocità angolare dell'albero motore e la tensione di armatura segue dal classico schema dei sistemi a controreazione, ed è:

$$W_{\omega_m/v_a}(s) = \frac{K_m}{K_m^2 + (R_a + sL_a)(\beta_{tot} + sJ_{tot})}$$

mentre la funzione di trasferimento tra la posizione del giunto  $\theta_l$  e la tensione di armatura è:

$$W_{\theta_l/v_a}(s) = \frac{1}{Ns} \cdot \frac{K_m}{K_m^2 + (R_a + sL_a)(\beta_{tot} + sJ_{tot})}$$

Analogamente, trascurando la tensione di armatura, la funzione di trasferimento tra la velocità angolare dell'albero motore e il disturbo del carico sul giunto è:

$$W_{\omega_m/\tau_l}(s) = -\frac{R_a + sL_a}{K_m^2 + (R_a + sL_a)(\beta_{tot} + sJ_{tot})}$$

mentre la funzione di trasferimento tra la posizione del giunto  $\theta_l$  e il disturbo del carico sul giunto è:

$$W_{\theta_l/\tau_l}(s) = -\frac{1}{Ns} \cdot \frac{R_a + sL_a}{K_m^2 + (R_a + sL_a)(\beta_{tot} + sJ_{tot})}$$

### 7.3 Controllo di un motore in corrente continua

Nel prosieguo, considereremo la semplificazione che l'induttanza del motore elettrico sia trascurabile:  $L_a \simeq 0$ . Per giustificare questa semplificazione, valutiamo le dinamiche dei due sistemi, elettrico e meccanico. Il primo è regolato dal blocco:

$$\frac{1}{R_a + sL_a} = \frac{1}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \tau = \frac{L_a}{R_a}$$

ossia da una dinamica stabile ( $\tau > 0$ ) del primo ordine, la cui costante di tempo vale  $\tau = L_a/R_a$ . Anche il sistema meccanico è descritto da una dinamica del primo ordine stabile del tipo:

$$\frac{1}{\beta_{tot} + sJ_{tot}} = \frac{1}{\beta_{tot}} \cdot \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \tau = \frac{J_{tot}}{\beta_{tot}}$$

la cui costante di tempo è

$$\tau = J_{tot}/\beta_{tot} \gg L_a/R_a$$

L'approssimazione  $L_a \simeq 0$ , dunque, è motivata dal fatto che le dinamiche di tipo meccanico sono ordini di grandezza più lente di quelle di tipo elettrico. Per cui, limitandoci alla velocità angolare come uscita del sistema, avremo

$$W_{\omega_m/v_a}(s) = \frac{K_m}{K_m^2 + R_a(\beta_{tot} + sJ_{tot})} = \frac{A}{1 + Ts}$$

$$W_{\omega_m/\tau_l}(s) = -\frac{R_a}{K_m^2 + R_a(\beta_{tot} + sJ_{tot})} = \frac{B}{1 + Ts}$$

con

$$A = \frac{K_m}{K_m^2 + R_a\beta_{tot}}, \quad B = -\frac{R_a}{K_m^2 + R_a\beta_{tot}}, \quad T = \frac{R_a J_{tot}}{K_m^2 + R_a\beta_{tot}}$$

Dunque, limitandoci alla sola uscita della velocità angolare, lo schema di Figura 7.1 può semplificarsi come in Figura 7.2:

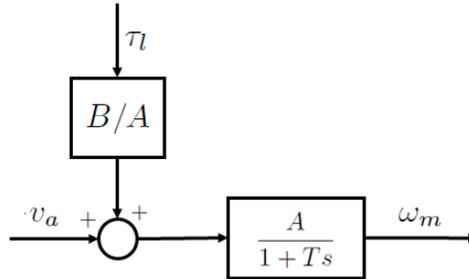


Figura 7.2 - Schema a blocchi semplificato di un motore in corrente continua

#### 7.3.1 Controllo di velocità

Supponiamo di voler fare un controllo della velocità angolare dell'albero motore, e di volerlo realizzare tramite un feedback a controreazione unitaria del tipo in Figura 7.3: dove  $\omega_{des}$  è la velocità

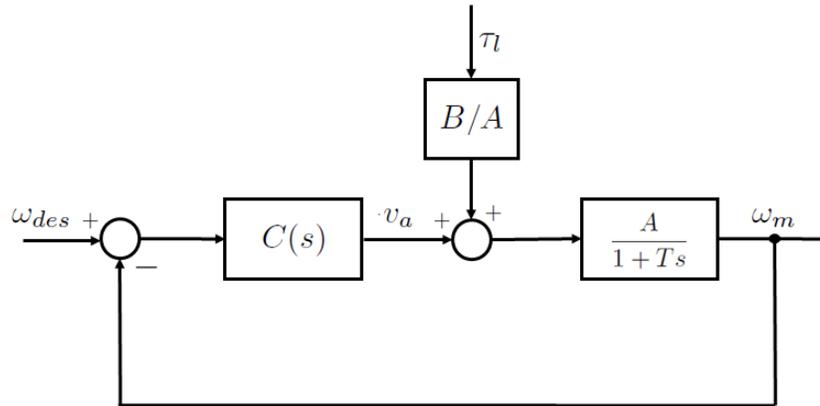


Figura 7.3 - Schema di controllo a controreazione unitaria di un motore in corrente continua

angolare desiderata e  $C(s)$  è il blocco di controllo da sintetizzare. Da quanto visto nella Sezione precedente, segue che un semplice regolatore proporzionale del tipo:

$$C(s) = K_P$$

- non dà l’astaticità del sistema a ciclo chiuso rispetto al disturbo del carico  $\tau_l$ , bensì un errore a regime pari a:

$$\frac{A}{1 + AK_P} \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{1 + AK_P}$$

- non dà errore nullo a regime per  $\omega_{des} = \omega^* = \text{costante}$ , bensì un errore a regime pari a:

$$\frac{1}{1 + AK_P}$$

Invece, se ipotizziamo un controllore che abbia un polo nell’origine, ossia Proporzionale Integrale (PI) del tipo:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

avremo che:

- il sistema a ciclo chiuso è astatico, per cui avremo una perfetta reiezione del carico (disturbo) a regime;
- il sistema a ciclo chiuso garantisce errore nullo a regime rispetto a una velocità angolare di regime scelta come specifica di progetto