Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

17 Aprile 2023

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty e^{-3t} \ln u \, dt \\ \dot{x} = 2x - u \\ x(0) = 4 \\ u \geq 0 \\ \displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \displaystyle\max_u \left(-\frac{1}{2} x_1(1)^2 + x_2(1) \right) \\ \dot{x_1} = x_1 + \sqrt{2}u \\ \dot{x_2} = -u^2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions
$\mathcal{F} = \{V(t, x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2$, with $a = a(t),\ b = \textit{constant}\ \}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, dt + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con f, g e ψ funzioni continue e $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Sotto opportune ipotesi, si enuncino la condizione necessaria di Bellman–Hamilton–Jacobi e la condizione finale affinchè V sia funzione valore V del problema (1);

ii. sotto opportune ipotesi, si enunci e si provi una condizione sufficiente affinchè V sia la funzione valore per il problema (1) e $\mathbf{u}^*$ suo controllo ottimo.

4. (6 punti) Si consideri il "moonlanding problem":

$$\begin{cases} \max\limits_{u\in\mathcal{C}} m(T) \\ \dot h = v \\ \dot v = \dfrac{u}{m} - g \\ \dot m = -ku \\ h(0) = h_0, \qquad h(T) = 0 \\ v(0) = v_0, \qquad v(T) = 0 \\ m(0) = M + F \\ m(t) \geq 0, \qquad h(t) \geq 0 \\ \mathcal{C} = \{u : [0,T] \to [0,\alpha], \text{ admissible}\} \end{cases}$$

dove $h_0,\ M,\ F,\ g,\ -v_0,\ k$ e α sono costanti positive fissate e il tempo finale T è libero.

i. Si illustri il problema nel dettaglio, introducendo le variabili di stato, il controllo, le loro relazioni tramite la dinamica e il funzionale da massimizzare;

ii. si provi che la soluzione ottima ha al piu' uno switching point.

5. (6 punti) Si consideri il gioco differenziale a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2}$$

dove T è fissato, U_i sono insiemi chiusi.

i. Si fornisca la definizione di equilibrio di Nash per (2) nelle strategie open–loop; si fornisca, sotto opportune ipotesi, una condizione necessaria per avere un equilibrio di Nash nelle strategie open–loop.

ii. Si consideri ora in particolare il modello "war of attrition and attack" di Isaacs:

$$\begin{cases} \textit{Player A}: \max\limits_{\alpha} J(\alpha, \beta), \qquad \textit{Player B: } \min\limits_{\beta} J(\alpha, \beta) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad\qquad 0 \leq \beta \leq 1 \\ J(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^T (1-\alpha)x_1 - (1-\beta)x_2\, \mathrm{d}t \\ \dot x_1 = m_1 - c_1\beta x_2 \\ \dot x_2 = m_2 - c_2\alpha x_1 \\ x_i(0) = x_{i0} > 0, \qquad x_i(t) > 0 \end{cases}$$

con $c_1,\ c_2,\ m_1$ e m_2 costanti positive, con $c_2 > c_1$, $T > 0$ fissato e grande.

a. Si introduca il modello proposto;

b. si determinino gli equilibri di Nash nella classe delle strategie open–loop.