Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

20 Gennaio 2023

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u T \\ \dot{x} = x + \frac{3}{u} \\ x(0) = 1 \\ x(T) = 2 \\ u \geq 3 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions
$\mathcal{F} = \{V(t, x) = a + bx + cx^2, \text{ with } a = a(t),\ b = b(t),\ c = c(t)\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati, nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate, uniformemente continue e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$.

i. Si introduca la nozione di soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi associato al problema assegnato, motivando la necessità di tale definizione;

ii. si provi che la funzione valore è soluzione viscosa (la dimostrazione dell'unicità non è richiesta) per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi.

4. (6 punti) Si consideri il modello "lavoratori e capitalisti" di Lancaster:

$$\begin{cases} \text{Wor.:} \ \max_u \int_0^T u\alpha k \, \mathrm{d}t \qquad \text{Cap.:} \ \max_v \int_0^T (1-v)(1-u)\alpha k \, \mathrm{d}t \\ \quad 0 < a \leq u \leq b < 1 \qquad\qquad 0 \leq v \leq 1 \\ \qquad\qquad \dot{k} = \alpha v(1-u)k \\ \qquad\qquad k(0) = k_0 > 0 \end{cases}$$

ove $\alpha > 0,\ a,\ b,\ T > 0$ e k_0 sono fissati.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. nel caso $\alpha = 1$ e $b \geq 1/2$, si determini l'equilibrio di Nash open–loop nel modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore e con le ipotesi necessarie, le definizioni di strategie non anticipative e la relativa definizione di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+. Quando si dice che il problema (1) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1, u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1, u_2) \\ |u_1| \leq 1 \qquad\qquad |u_2| \leq 1 \\ J(u_1, u_2) = \int_0^\infty \operatorname{sgn}(x) \left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \psi(T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \in \mathcal{T} \end{cases} \tag{2}$$

dove $\mathcal{T} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ é il target set chiuso; sia $\mathcal{G} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ il game set. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in $C^1(\mathcal{G} \setminus \mathcal{T})$ e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs (se necessario si aggiungano altre ipotesi): sia $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*)$ un equilibrio di Nash nella classe delle strategie feedback per il problema (2) con traiettoria $\mathbf{x}^*$, con $\mathbf{x}^*(0) = \boldsymbol{\alpha}$, $(0, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ ed exit time $T_{\mathbf{x}^*}$. Si fornisca una dimostrazione geometrica che V soddisfa l'equazione di Isaacs per il problema (2) lungo l'optimal path.