Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

12 Settembre 2023

Cognome:_____________________________ nome:_____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \displaystyle\min_u \int_0^1 (2-5t)u \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x + 4te^{2t}u \\ x(0) = 0 \\ x(1) = e^2 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

2. Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \displaystyle\min_u \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(u^2 + x^4\right) \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = 2 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \displaystyle J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1) con ipotesi minimali;

ii. sotto opportune ipotesi, si illustri un risultato sul comportamento dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (*optimal path*) e lo si provi (è richiesto di provare anche il "lemma tecnico");

iii. si introduca la nozione di controllo abnormale. Si determini il controllo ottimo per il seguente problema, mostrando che é abnormale:

$$\begin{cases} \displaystyle\max \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) u \,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = (x_1 - tu)^2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = x_2(1) = 0 \end{cases}$$

4. (6 punti) Si consideri il "two-sector model"

$$\begin{cases} \displaystyle\max_{u\in\mathcal{C}} \int_0^T x_2 \,\mathrm{d}t \\ \dot x_1 = \alpha u x_1 \\ \dot x_2 = \alpha(1-u)x_1 \\ x_1(0) = a_1 \\ x_2(0) = a_2 \\ \mathcal{C} = \{u : [0,T] \to [0,1] \subset \mathbb{R},\ u \in KC\} \end{cases}$$

dove $\alpha,\ a_1,\ a_2$ e T sono positivi e fissi; si consideri in particolare il caso $T > \frac{2}{\alpha}$.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si risolva il modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \displaystyle\max_{\mathbf{u}} \int_0^\infty f(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2}$$

i. Si consideri il controesempio di Halkin

$$\begin{cases} \displaystyle\max_u J(u) \\ \displaystyle J(u) = \int_0^\infty (1-x)u \,\mathrm{d}t \\ \dot x = (1-x)u \\ x(0) = 0 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

e si mostri che esistono dei controlli ottimi il cui moltiplicatore λ^* è tale che $\lim_{t\to\infty} \lambda^*(t) \neq 0$;

ii. con opportune ipotesi, si enunci e si provi una condizione sufficiente di ottimalità per il problema (2);