Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

25 Febbraio 2021

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_1^3 [x + 2t(1 - e^t)u]\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x + 4ut \\ x(1) = 0 \\ 0 \le u \le 2 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty 2\sqrt{u}e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x - u \\ x(0) = 1 \\ x \ge 0 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

In order to solve B–H–J equation for the current value function, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V^c(x) = A\sqrt{x},\ A \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$, si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;

ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;

iii. sia $V \in C^1$; si provi che essere soluzione del sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi é equivalente a essere soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi.

4. (6 punti) Si consideri il seguente modello di produzione e gestione del magazzino:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^T (\alpha u^2 + \beta x)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = A \\ x(T) = B \\ u \geq 0 \end{cases}$$

ove $T > 0,\ 0 \leq A \leq B$ sono tutte costanti fisse.

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto nel caso $\alpha = 1,\ \beta = 4,\ T = 2,\ B = 2$ e $|A| < 2$ (si noti che qui A puo' essere negativo).

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions

$$\mathcal{F} = \{V(t,x) = a(t-2)^3 + b(x+2)(t-2) + c\frac{(x-2)^2}{t-2},\ \text{with } a,b,c \text{ non zero constants }\}.$$

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1 \in U_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2 \in U_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si considerino per il gioco le strategie open-loop; sotto le opportune ipotesi si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+, introducendo le nozioni di controllo e strategia non anticipativa necessarie. Quando si dice che il problema (1) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1, u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1, u_2) \\ \qquad |u_1| \leq 1 \qquad\qquad\qquad |u_2| \leq 1 \\ J(u_1, u_2) = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sgn}(x)\left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si fornisca la condizione di Isaacs per il problema (1): si mostri che tale condizione per (2) non è verificata.