Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

30 Giugno 2021

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty e^{-t/2}(x-u)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = ue^{-t} \\ x(0) = 1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^2 (2tx - u^2)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 1 - u^2 \\ x(0) = 0 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

In order to solve the BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = At^3 + Bxt^2 + Ct + Dx + E,$ with A, B, C, D, E constants$\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati, $U \subset \mathbb{R}^k$ chiuso.

i. Si enunci la condizione necessaria di Pontryagin per il problema (1), con ipotesi minimali;

ii. con ulteriori ipotesi rispetto al punto i., si provi la condizione necessaria di Pontryagin (dimostrando anche il "lemma tecnico"necessario);

iii. sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione sufficiente di Arrow per il problema (1) e la si provi.

4. (6 punti) Si consideri il "moonlanding problem":

$$\begin{cases} \max\limits_{u \in \mathcal{C}} m(T) \\ \dot{h} = v \\ \dot{v} = \dfrac{u}{m} - g \\ \dot{m} = -ku \\ h(0) = h_0, \qquad h(T) = 0 \\ v(0) = v_0, \qquad v(T) = 0 \\ m(0) = M + F \\ m(t) \geq 0, \qquad h(t) \geq 0 \\ \mathcal{C} = \{u : [0,T] \to [0,\alpha], \text{ admissible}\} \end{cases}$$

dove $h_0,\ M,\ F,\ g,\ -v_0,\ k$ e α sono costanti positive fissate e il tempo finale T è libero.

i. Si illustri il problema nel dettaglio, introducendo le variabili di stato, il controllo, le loro relazioni tramite la dinamica e il funzionale da massimizzare;

ii. si provi che la soluzione ottima ha al piu' uno switching point.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di cattura-evasione di tipo

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{u}_1(t) \in U_1 \subset \mathbb{R}^{k_1} \qquad\qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \subset \mathbb{R}^{k_2} \\ \qquad J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \geq 0 \text{ s.t. } \mathbf{x}(t) \in \operatorname{int}(\mathcal{T}_0) \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con g continua, target set $[0,\infty) \times \mathcal{T}_0$ chiuso e game set $[0,\infty) \times \mathcal{G}_0$. Si supponga, inoltre, che la condizione di Isaacs sia soddisfatta.

i. Sotto opportune e ulteriori ipotesi

- si forniscano le definizioni di insieme degli stati di cattura $\mathcal{C}_{ap}$, di insieme degli stati di fuga $\mathcal{E}_{sc}$ e di barriera $\mathcal{B}_{ar}$;
- si introduca la nozione di semipermeabilità;
- si introduca il concetto di controllo di barriera;
- si forniscano e **si dimostrino** le equazioni che permettono di costruire la barriera.

ii. Si consideri il modello "Interception of a straight flying evader":

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\colon \min\limits_{\psi} J(\psi, \varphi), \qquad \textit{Evader}\colon \max\limits_{\varphi \in \{-1,+1\}} J(\psi, \varphi) \\ \qquad J(\psi, \varphi) = \begin{cases} -1 & \text{if } \exists\, t \geq 0 \text{ s.t. } \|(x(t), y(t))\|_2 < l \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \qquad \dot{x} = \omega\varphi - \sin\psi \\ \qquad \dot{y} = -\cos\psi \\ \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \qquad y_0 \geq 0 \end{cases}$$

con $\omega > 1$ e $l > 0$ fissati.

- si illustri il modello con rigore, introducendo le variabili di stato, il controllo e le loro relazioni tramite la dinamica;
- sfruttando risultati del punto i., si costruisca la barriera del problema, gli insiemi $\mathcal{C}_{ap}$ e $\mathcal{E}_{sc}$.