

Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

15 Aprile 2019

Cognome: _____ nome: _____

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u T \\ \dot{x} = x + \frac{3}{u} \\ x(0) = 1 \\ x(T) = 2 \\ u \geq 3 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min_u \int_0^2 (x - u) dt + x(2) \\ \dot{x} = 1 + u^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions

$$\mathcal{F} = \{V(t, x) = A + Bt + Ct^2 + D \ln(3 - t) + E(3 - t)x, \text{ with } A, B, C, D, E \text{ constants}\}.$$

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k, \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati.

- i. Nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f , g e ψ siano limitate e Lipschitz rispetto a \mathbf{x} uniformemente rispetto a \mathbf{u} , si provi che la funzione valore è limitata e Lipschitz;
- ii. si consideri l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi: il fatto che la funzione valore sia Lipschitz che conseguenze ha? Si introduca la nozione di soluzione viscosa per l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi, motivando la necessità di tale definizione;
- iii. si provi che $V(t, x) = |x| + t$ è soluzione viscosa dell'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi per il problema

$$\begin{cases} \max \int_{-1}^0 -\frac{(|u| + 2)^2}{4} dt + |x(0)| \\ \dot{x} = u \\ |u| \leq 2 \\ x(-1) = 1 \end{cases}$$

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello “the lady in the lake”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Man (P): } \min_{u_1} |\theta(T)| \\ |u_1| \leq 1 \\ \dot{\theta} = \frac{v_E \sin u_2}{r} - \frac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0, r(T) = R \end{array} \right. \quad \text{Lady (E): } \max_{u_2} |\theta(T)|$$

con v_E fissato in $(0, 1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

- i. Si introduca il modello proposto;
- ii. si determini un equilibrio di Nash per il problema proposto. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^* .

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\mathbf{u}) = \int_0^\infty e^{-rt} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{0, \boldsymbol{\alpha}}} J(\mathbf{u}) \end{array} \right. \quad (1)$$

con $r > 0$.

- i. Si introduca con rigore la nozione di funzione valore corrente V^c . Si dimostri la relazione tra V^c e la funzione valore V del problema. Si ricavi l'equazione di Bellman–Hamilton–Jacobi per V^c ;
- ii. si usino i risultati del punto precedente per risolvere il seguente modello di “optimal consumption”

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} c^\gamma e^{-\delta t} dt \\ \dot{x} = rx - c \\ x(0) = x_0 > 0 \\ x \geq 0 \\ c \geq 0 \end{array} \right.$$

ove r , γ e δ sono costanti positivi, con $\gamma \in (0, 1)$, tali che $\delta > r\gamma$.