Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

29 Gennaio 2019

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_1^4 t^2 \left(\frac{1}{u} - x\right) \mathrm{d}t \\ \dot{x} = -x - tu \\ x(4) = 2 \\ 1 \leq u \leq 3 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_0^2 (x^2 + u^2)\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = -2 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $xF_x + Ax^2 + BF_x^2 + F_t = 0$ (with A and B constants), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = x^2 G(t),\ \text{with } G = G(t) \text{ function}\}$.

3. (6 punti) Si consideri un problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con l'insieme $U \subset \mathbb{R}^k$.

i. Nel contesto del metodo variazionale e sotto opportune ipotesi minimali, si enunci la condizione necessaria di ottimalitá;

ii. nel contesto della programmazione dinamica e sotto opportune ipotesi, si enuncino la condizioni necessarie affinché una funzione sia la funzione valore del problema;

iii. sotto ragionevoli ipotesi, si enunci e si provi il legame tra moltiplicatore e funzione valore.

4. (6 punti) Si consideri il "moonlanding problem":

$$\begin{cases} \max\limits_{u\in\mathcal{C}} m(T) \\ \dot h = v \\ \dot v = \dfrac{u}{m} - g \\ \dot m = -ku \\ h(0) = h_0, \qquad h(T) = 0 \\ v(0) = v_0, \qquad v(T) = 0 \\ m(0) = M + F \\ m(t) \ge 0, \qquad h(t) \ge 0 \\ \mathcal{C} = \{u : [0,T] \to [0,\alpha], \text{ admissible}\} \end{cases}$$

where $h_0,\ M,\ F,\ g,\ -v_0,\ k$ e α sono costanti positive fissate, il tempo finale T é libero.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si provi che esiste al piú un solo istante di commutazione.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore, le definizioni di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+, introducendo le nozioni di controllo e strategia non anticipativa necessarie. Quando si dice che il problema (1) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1,u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1,u_2) \\ |u_1| \le 1 \qquad\qquad |u_2| \le 1 \\ J(u_1,u_2) = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sgn}(x)\left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ \dot x = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \psi(T,\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T,\mathbf{x}(T)) \in \partial S \end{cases} \tag{3}$$

con T libero e target set $S \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ chiuso. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in C^1 e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs (se necessario si aggiungano altre ipotesi). Si fornisca una dimostrazione geometrica dell'equazione di Isaacs per il problema (3).