Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

24 Settembre 2019

Cognome:______________________________ nome:______________________________

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min\limits_u T \\ \dot{x} = 2x + \frac{1}{u} \\ x(0) = \frac{5}{6} \\ x(T) = 2 \\ 3 \le u \le 5 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^2 (x-u)\,\mathrm{d}t + x(2) \\ \dot{x} = 1 + u^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions

$\mathcal{F} = \{V(t,x) = A + Bt + Ct^2 + D\ln(3-t) + E(3-t)x, \text{ with } A,B,C,D,E \text{ constants}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0, t_1 e $\boldsymbol{\alpha}$ fissati.

i. Si definisca la funzione valore per il problema proposto e si forniscano, sotto opportune ipotesi, condizioni necessarie affinché una funzione sia la funzione valore del problema: si dimostri almeno una di queste condizioni necessarie;

ii. sotto opportune ipotesi, si forniscano condizioni sufficienti affinché una funzione sia la funzione valore del problema: si dimostrino tali condizioni sufficienti.

4. 4. (6 punti) Si consideri il modello "lavoratori e capitalisti" di Lancaster:

$$\begin{cases} \text{Wor.: } \max\limits_u \displaystyle\int_0^T uk\,\mathrm{d}t & \text{Cap.: } \max\limits_v \displaystyle\int_0^T (1-v)(1-u)k\,\mathrm{d}t \\ 0 < a \le u \le b < 1 & 0 \le v \le 1 \\ \dot{k} = \alpha v(1-u)k & \\ k(0) = k_0 > 0 & \end{cases}$$

ove $\alpha > 0$, a, b, T e k_0 sono fissati.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. si introduca per un gioco differenziale a due giocatori, la nozione di equilibrio di Nash open–loop e gli elementi di teoria necessari per determinare tale equilibrio nel modello proposto (non è richiesto provare nulla);

iii. nel caso $\alpha = 1$ e $b \geq 1/2$, si determini l'equilibrio di Nash open–loop nel modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-rt} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, \mathrm{d}t \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_{0,\boldsymbol{\alpha}}} J(\mathbf{u}) \end{cases} \tag{1}$$

con $r > 0$.

i. Si introduca con rigore la nozione di funzione valore corrente V^c. Si dimostri la relazione tra V^c e la funzione valore V del problema. Si ricavi l'equazione di Bellman–Hamilton–Jacobi per V^c;

ii. si usino i risultati del punto precedente per risolvere il seguente modello di "optimal consumption "

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\gamma} c^\gamma e^{-\delta t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = rx - c \\ x(0) = x_0 > 0 \\ x \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

ove $r,\ \gamma$ e δ sono costanti positivi, con $\gamma \in (0, 1)$, tali che $\delta > r\gamma$.