Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di Metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

3 Febbraio 2016

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_{-1}^{1} (x - 1 + t^2)^2 \, dt \\ \dot{x} = u \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_{0}^{2} (x^2 + u^2) \, dt \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 2 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

In order to solve the PDE $xF_x + Ax^2 + F_t = 0$ (with A constant), we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{F(t,x) = x^2 G(t), \text{ with } G = G(t) \text{ function}\}$.

3. (6 punti) Si consideri un problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \, dt \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con $f \in C^1$, $g \in C^1$ e l'insieme $U \subset \mathbb{R}^k$.

i. Nel contesto del metodo variazionale e sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione necessaria di ottimalitá;

ii. nel contesto della programmazione dinamica e sotto opportune ipotesi, si enunci la condizione necessaria di ottimalitá;

iii. sotto ragionevoli ipotesi, si enunci e si provi il legame tra moltiplicatore e funzione valore.

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \ \displaystyle\min_{u_1} |\theta(T)| \qquad \textit{Lady (E)}: \ \max_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \le 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dot{r} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

con v_E fissato in $(0,1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

i. Si introduca il modello proposto;

ii. si risolva il modello determinando i controlli ottimi, richiamando i risultati teorici che si usano (non è richiesto provare nulla). Non è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Nel contesto dei problemi di controllo ottimo a orizzonte infinito, con il metodo variazionale,

i. si enunci una condizione sufficiente di ottimalità;

ii. si mostri, attraverso il controesempio di Halkin, che la condizione di transversalità all'infinito non è necessaria.