Test su medie

Varianza non nota

Test su una media - varianza non nota

Un metodo analitico **M** per la determinazione del colesterolo nel sangue ha distribuzione gaussiana degli errori con imprecisione (σ) ignota.

Per verificare se il metodo è accurato, si eseguono un certo n=25 misure di uno "standard" avente concentrazione nota (valore vero: θ = 180.0 mg/dl) ottenendo:

$$\bar{x} = 183.5 \text{ mg/dl} \qquad s = 8.0 \text{ mg/dl}$$

$$H_0\!: \mu = \theta = 180$$
$$H_1\!: \mu \neq \theta = 180$$

In questo caso, tuttavia, il rapporto: $$z = \frac{\bar{x} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}}$$

non può essere calcolato perché σ non è noto.

Test su una media - varianza non nota

Si può pensare allora di sostituire, nel rapporto standardizzato, il parametro σ con la stima campionaria **s** (che ha n-1 gradi di libertà), ottenendo

$$t = \frac{\bar{x} - \theta}{s / \sqrt{n}}$$

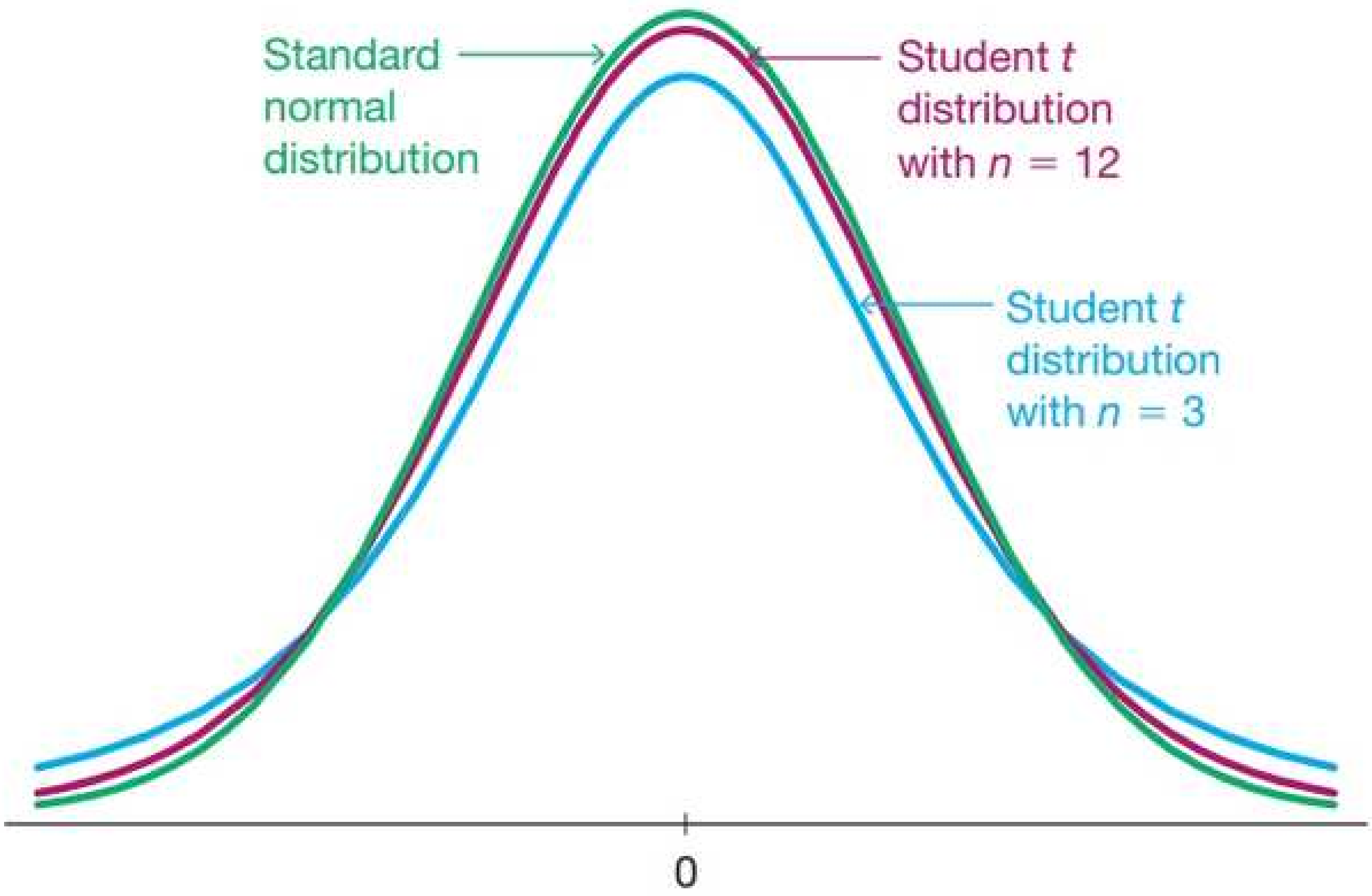
che è un rapporto tra una variabile casuale gaussiana (con media nulla sotto H_0) e una variabile casuale con distribuzione proporzionale alla radice di un χ^2 con n - 1 gradi di libertà.

Sotto H_0, tale rapporto ha distribuzione t di Student con n-1 gradi di libertà

Distribuzione t student-William Gosset (1876–1937)

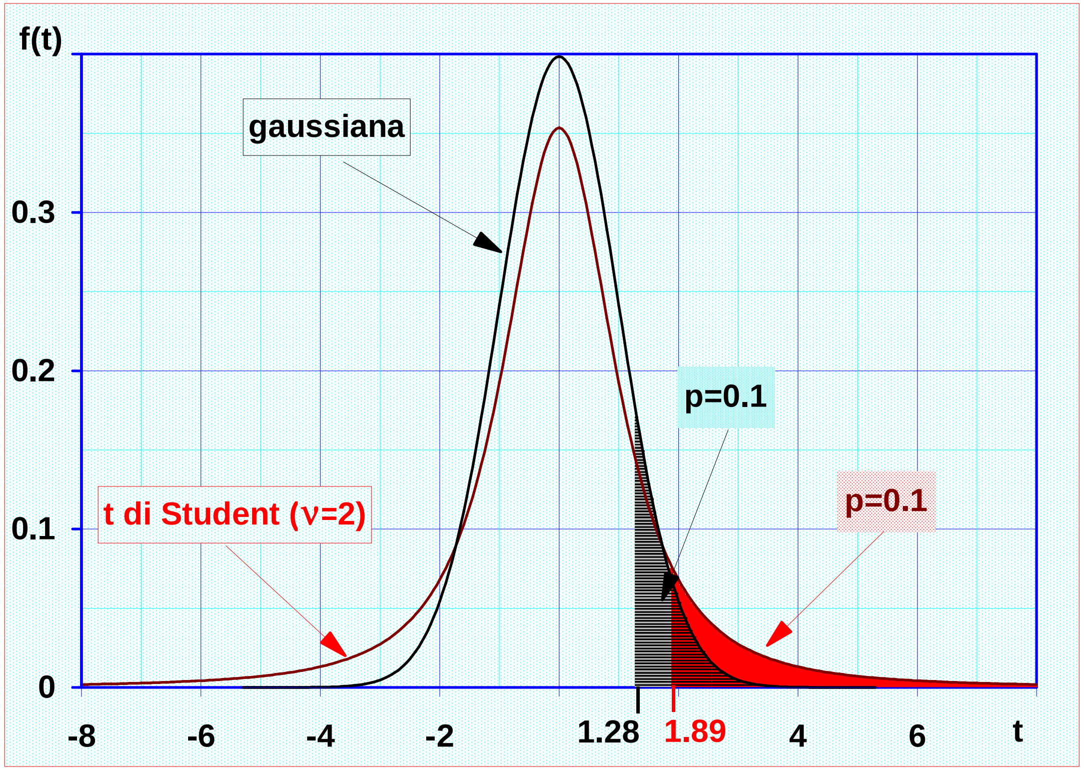
- La distribuzione t di Student ha la stessa forma a campana simmetrica generale della distribuzione normale standard, ma ha una maggiore variabilità (con distribuzioni più ampie), come ci aspettiamo con campioni piccoli.
- La distribuzione t di Student ha una media di $t = 0$ (proprio come la distribuzione normale standard ha una media di $z = 0$)
- La deviazione standard della distribuzione t di Student varia con la dimensione del campione, ma è maggiore di 1 (a differenza della distribuzione normale standard, che ha $\sigma = 1$).
- La distribuzione t di Student varia con la dimensione del campione.
- All'aumentare della dimensione del campione, la distribuzione t di Student si avvicina alla distribuzione normale standard.

Distribuzione t student-William Gosset (1876–1937)



Distribuzione t di Student

la distribuzione *t* di Student ha **percentili con valore assoluto tanto più elevato** rispetto a quello dei corrispondenti percentili della Gaussiana **quanto minore è il numero di gradi di libertà.**
Ad esempio, il 90° percentile della gaussiana standard è 1.282, mentre i corrispondenti percentili delle *t* di Student con 1, 2, 3 e 9 g.d.l. sono rispettivamente 3.078, 1.886, 1.638 e 1.383.



Test su una media - varianza non nota

Nell'esempio: $$t = \frac{183.5 - 180.}{8/\sqrt{25}} = \frac{3.5}{1.6} = 2.188$$

Poiché il valore calcolato (2.188) è maggiore del centile 97.5 della distribuzione t con 24 g.d.l. (2.064), l'ipotesi nulla viene rifiutata al livello di significatività α = 0.05.

L'esperimento indica che il metodo M **non è accurato**.

IC su una media – varianza non nota

In modo del tutto analogo a quanto visto in precedenza, è possibile calcolare **l'intervallo di confidenza per l'accuratezza** ($\delta = \mu_M - \theta$)

$$I.C._{(1-\alpha)} = (\bar{x} - \theta) \pm t_{a/2,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

dove v = n-1

Nell'esempio la confidenza corrispondente ad un rischio d'errore di tipo I pari a $\alpha = 0.05$ è $(1-\alpha) = 0.95$

$$I.C._{95\%} = 3.5 \pm 2.064 \cdot 1.6 = [0.2; 6.8]$$

Quindi la vera inaccuratezza (δ) del metodo M è un valore incluso tra 0.2 e 6.8 mg/dl o, in altri termini, l'inaccuratezza non è inferiore a 0.2 ma non è superiore a 6.8 mg/dl.
La probabilità che tale affermazione sia vera è 0.95

Considerazioni

Si noti che l'intervallo di confidenza non contiene lo 0:

- quindi la probabilità che δ sia nullo è inferiore al 5%
- questo è coerente con l'esito del test di ipotesi

Si noti che l'uso di una stima dell'errore standard al posto dell'ignoto σ comporta l'aumento dell'ampiezza dell'intervallo di confidenza:

- l'aumento è tanto maggiore quanto più imprecisa è la stima di σ, cioè quanto minore è la dimensione del campione

Test per il confronto tra due medie – varianza non nota

Si vuole valutare se una nuova sostanza β-bloccante (F) abbia effetto anti-ipertensivo.

- una soluzione di F è stata somministrata per 3 settimane a 25 ratti
- una soluzione a base di solo solvente (V) è stata somministrata ad altri 15 ratti

Su ogni ratto si è calcolata la ***risposta al trattamento*** come differenza (x) tra la pressione arteriosa sistolica prima e dopo il trattamento, ottenendo i seguenti risultati

Farmaco F:	$n_F = 25$	$\bar{x}_F = 40$	$s_F = 24$
Farmaco V:	$n_V = 15$	$\bar{x}_V = 20$	$s_V = 30$

Test per il confronto tra due medie - varianza non nota

Si vuole saggiare se il metodo F abbia effetto anti-ipertensivo.
Ciò significa scegliere tra le due ipotesi:

$H_0 : \mu_F = \mu_V$ Le medie vere dei due metodi coincidono, quindi F non ha effetto anti-ipertensivo

$H_1 : \mu_F > \mu_V$ Le media di F è maggiore di quella di V, quindi F ha effetto anti-ipertensivo

Test per il confronto tra due medie - varianza non nota

La situazione è analoga a quella illustrata a proposito del confronto dell'efficacia di due farmaci per la diminuzione della pressione sanguigna (V ed N). Tuttavia, la statistica test

$$z = \frac{(\bar{x}_F - \bar{x}_V)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_F} + \frac{1}{n_V}\right)}}$$

non può essere calcolata perché σ non è noto.

Anche in questo caso si può pensare di sostituire, nel rapporto standardizzato, il parametro σ con una sua stima campionaria

Stima della varianza

Se si può assumere che la variabilità della risposta (x) sia indipendente dal trattamento, è ragionevole **combinare** le due stime (s_F e s_V) per ottenere una più precisa stima di σ

$$s^2 = \frac{(n_F - 1)\cdot s_F^2 + (n_V - 1)\cdot s_V^2}{(n_F - 1) + (n_V - 1)}$$

- **media delle** due **stime** ottenute ***entro*** ciascun **gruppo**, **ponderata** per i gradi di libertà delle due stime (s_F^2 e s_V^2)
- **i gradi di libertà aumentano**, per tale motivo s è più precisa delle due stime che la compongono.

Nell'esempio:

$$s^2 = \frac{24\cdot 24^2 + 14\cdot 30^2}{24+14} = \frac{26424}{38} = 695.37 \qquad \Rightarrow s=26.4$$

Test per il confronto tra due medie - varianza non nota

La statistica test diventa

$$t = \frac{\left(\bar{x}_F - \bar{x}_V\right)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_F} + \frac{1}{n_V}\right)}}$$

che è un rapporto tra una variabile casuale gaussiana (con media nulla sotto H_0) e una variabile casuale con distribuzione proporzionale alla radice di un χ^2 con $\upsilon = n_F + n_v - 2$ gradi di libertà.

Sotto H_0, tale rapporto ha distribuzione t di Student con $n_F + n_v - 2$ gradi di libertà

Test per il confronto tra due medie – varianza non nota

Nell'esempio:

$$t = \frac{\overline{x}_F - \overline{x}_V}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_F} + \frac{1}{n_V}\right)}} = \frac{40 - 20}{\sqrt{26.4^2\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{15}\right)}} = \frac{20}{8.62} = 2.320$$

Si può concludere che la sostanza F ha attività anti-ipertensiva.

Infatti, il valore il valore della statistica *t* calcolata (2.320) è maggiore del 95° centile (1.684) della distribuzione *t* con 38 g.d.l. (***test ad 1 coda***).

IC per la differenza tra due medie – varianza non nota

Se il fine è stimare l'effetto della sostanza F al netto dell'eventuale effetto di V:

1. **si esegue il test sull'uguaglianza delle medie μ_F e μ_V**
2. **si calcola anche l'intervallo di confidenza per la vera differenza tra le medie ($\delta=\mu_F-\mu_V$)**

$$I.C._{(1-\alpha)} = (\overline{x}_F - \overline{x}_V) \pm t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_F}+\frac{1}{n_V}\right)}$$

Nell'esempio, la confidenza corrispondente ad un errore di tipo I pari a α = 0.10 è 1 - α = 0.90 :

$$I.C._{90\%} = 20.0 \pm 1.684 \cdot 8.62 = [5.5; 34.5]$$

IC per la differenza tra due medie – varianza non nota

Si può quindi affermare l'effetto anti-ipertensivo netto (δ) sia un qualunque riduzione di pressione arteriosa sistolica inclusa tra 5.5 e 34.5 mmHg (in altri termini, l'effetto non è inferiore a 5.5 e non è superiore a 34.5 mmHg).

Tuttavia questa affermazione non è certa, ma la probabilità (confidenza) che sia vera è del 90%

Si noti che l'intervallo di confidenza non contiene lo 0:

- **quindi la probabilità che la sostanza F sia inattiva è inferiore all' 5%**
- **questo è coerente con l'esito del test di ipotesi**