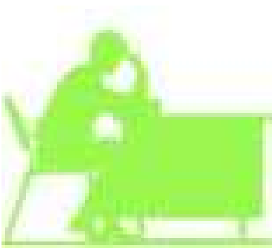
INCERTEZZA e PROBABILITA’

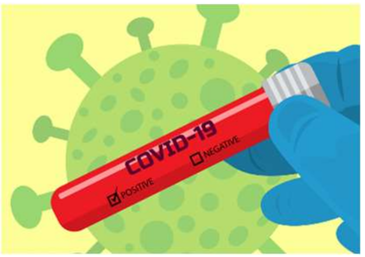
Incertezza e Probabilità

<u>Esempi:</u>

Qual è la probabilità che la pallina si posi su un numero dispari?



Qual è la probabilità che uno studente di Monza passi l'esame di Statistica Medica al primo appello?



Qual è la probabilità di esser infettati da SARS-CoV-2

Probabilità

La <u>PROBABILITÀ</u> MISURA
<u>L'INCERTEZZA</u>
legata al verificarsi di un evento

Terminologia

Esperimento aleatorio

"Operazione" il cui risultato non può essere previsto con certezza

es. Lancio di un dado

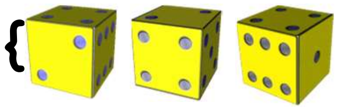
Evento

Ogni possibile risultato di un esperimento

➔ evento semplice ↔ risultato elementare

es. A={esce il 2}= {  }

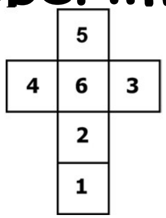
➔ evento composto ↔ combinazione di eventi semplici

es. A={esce un numero pari}= {  }

Spazio degli eventi

Insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento

es. Lancio di un dado $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$



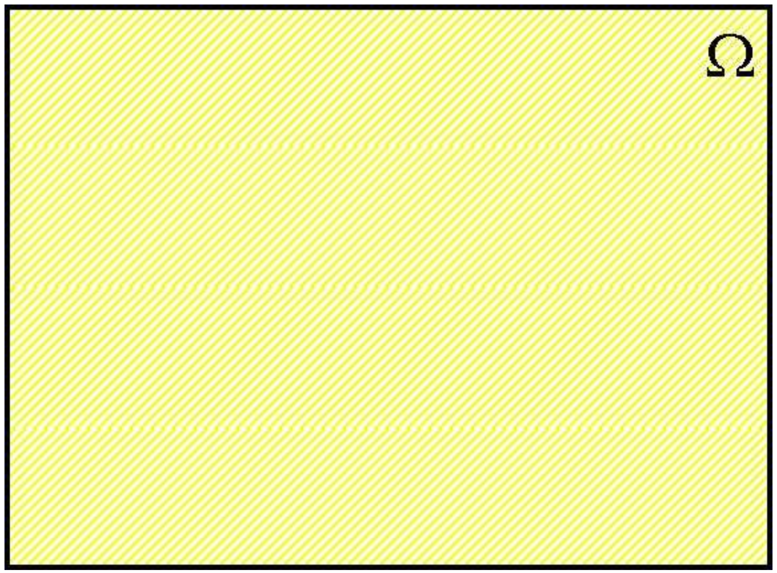
Terminologia

Linguaggio degli insiemi	$\Rightarrow$	Linguaggio degli eventi

- Universo: Ω
- Unione: $A \cup B = C$
- Intersezione: $A \cap B = C$
- Complementazione: $A \rightarrow \bar{A} = \Omega - A$
- Inclusione: $A, B \rightarrow B \subset A$
- Insiemi disgiunti: $A \cap B = \emptyset$
- Insiemi esaustivi: A, B, C, D

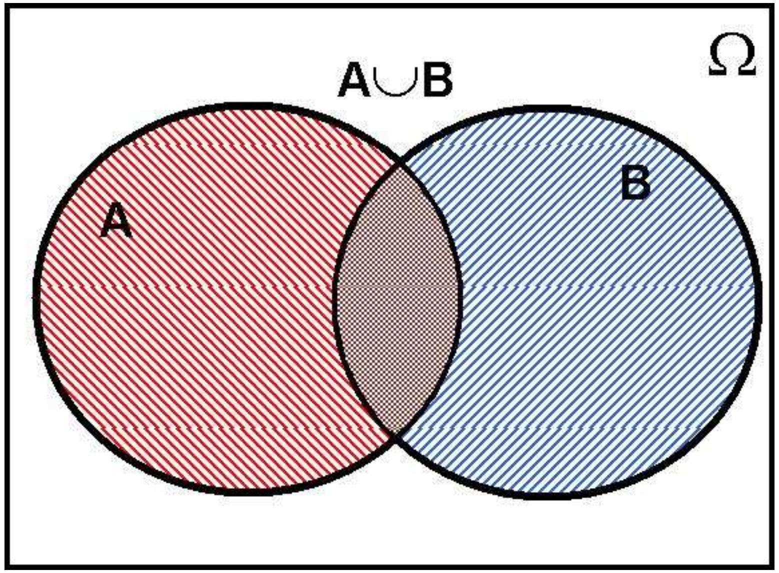
•Universo: Ω

(Spazio campionario)



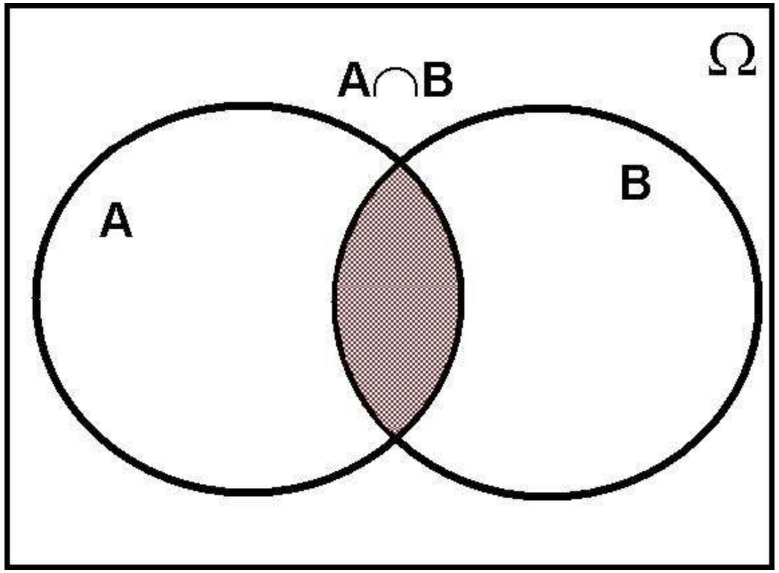
Insieme di partenza che contiene tutti gli insiemi elementari

•Unione: $A \cup B = C$



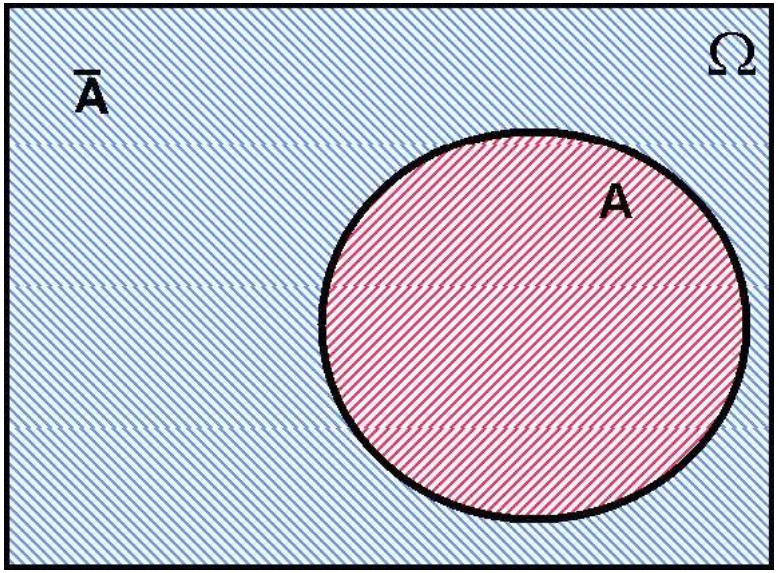
Insieme di tutti elementi che appartengono ad A o B o ad entrambi

•Intersezione: $A \cap B = C$



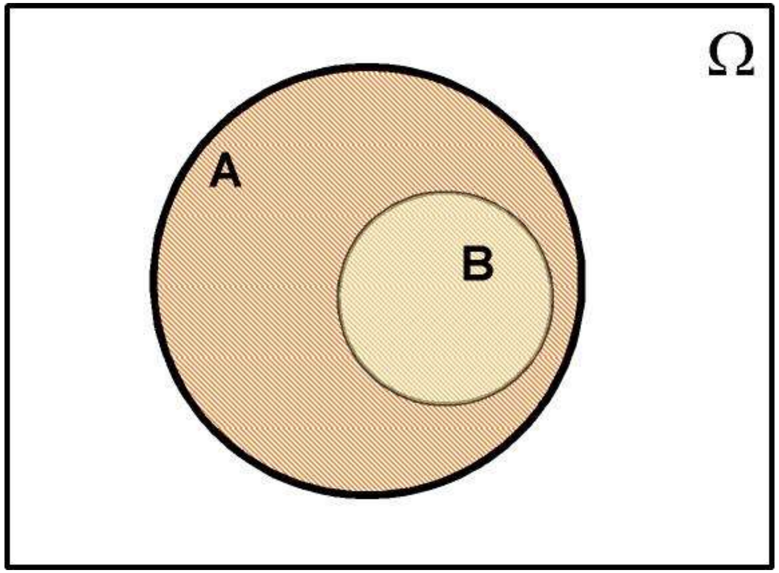
Insieme di tutti elementi che appartengono sia ad A che a B

•Complementazione: $A \rightarrow \bar{A} = \Omega - A$



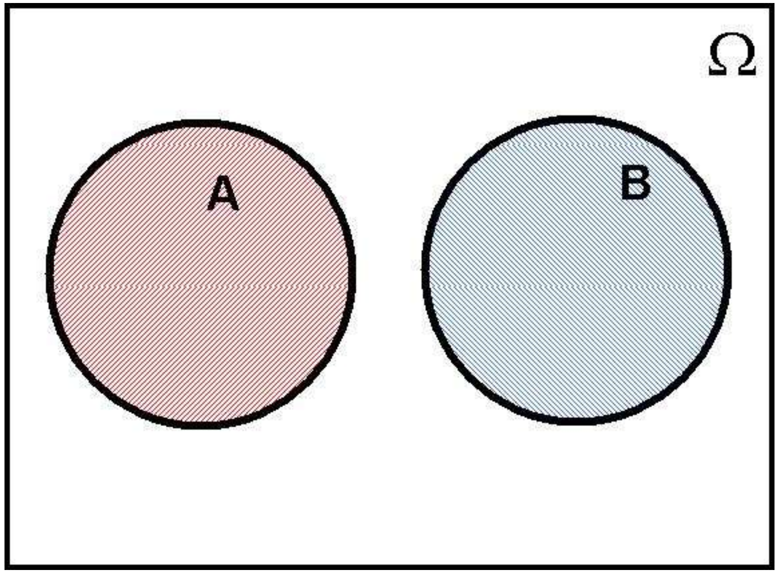
Insieme degli elementi di Ω che non appartengono ad A

•Inclusione: $A, B \rightarrow B \subset A$



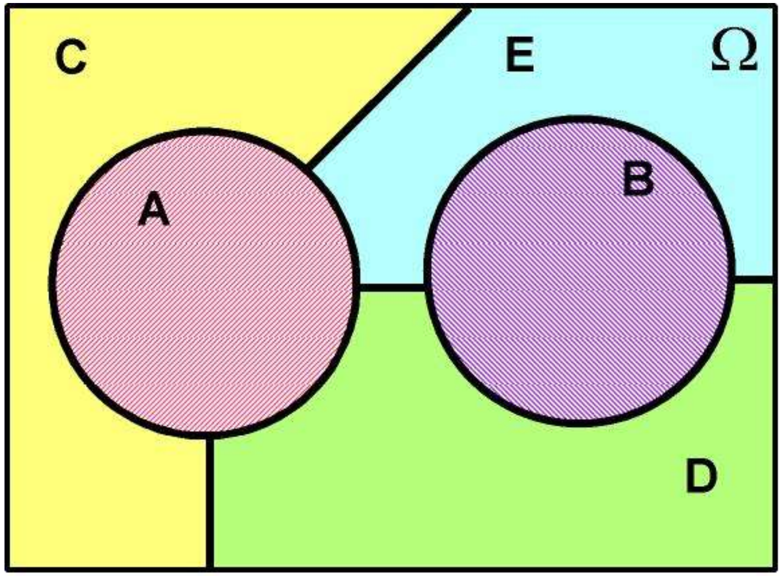
Insieme tale per cui tutti gli elementi di B appartengono anche ad A

•Insiemi disgiunti: $A \cap B = \emptyset$



Insiemi che non hanno nessun elemento in comune, la cui intersezione è quindi l'insieme vuoto

•Insiemi esaustivi: $A \cup B \cup C \cup D \cup E = \Omega$



Insiemi che non hanno nessun elemento in comune la cui unione è l'universo

Operazioni sugli insiemi - regole

Legge commutativa

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{e} \quad A \cap B = B \cap A$$

Legge associativa

$$A \cup \left(B \cup C\right) = \left(A \cup B\right) \cup C \quad \text{e} \quad A \cap \left(B \cap C\right) = \left(A \cap B\right) \cap C$$

Legge distributiva

$$A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$$

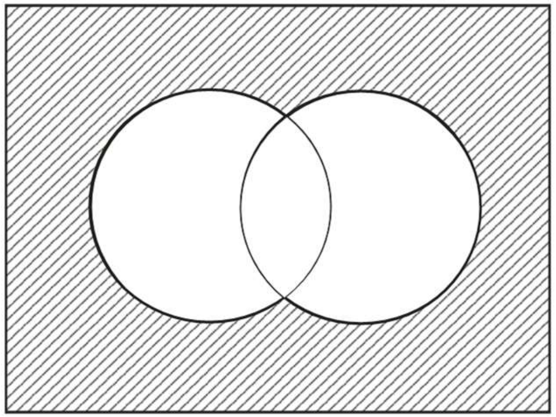
e

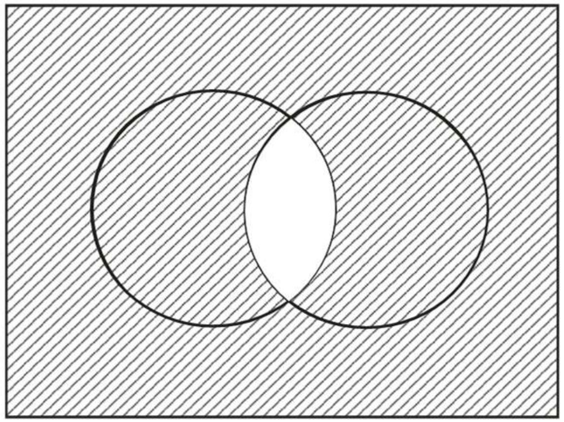
$$A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$$

Operazioni sugli insiemi

Leggi di De Morgan

$$\left(A \cup B\right)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad \left(A \cap B\right)^c = A^c \cup B^c$$





Definizione di Probabilità

- Classica
- Frequentista
- Soggettivista

Esistono però 3 assiomi validi <u>a prescindere</u> dalla natura della definizione

Definizione di Probabilità: assiomi (Kolmogorov)

Sia Ω lo spazio degli eventi:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ con $A \in \Omega$, un qualunque evento di Ω

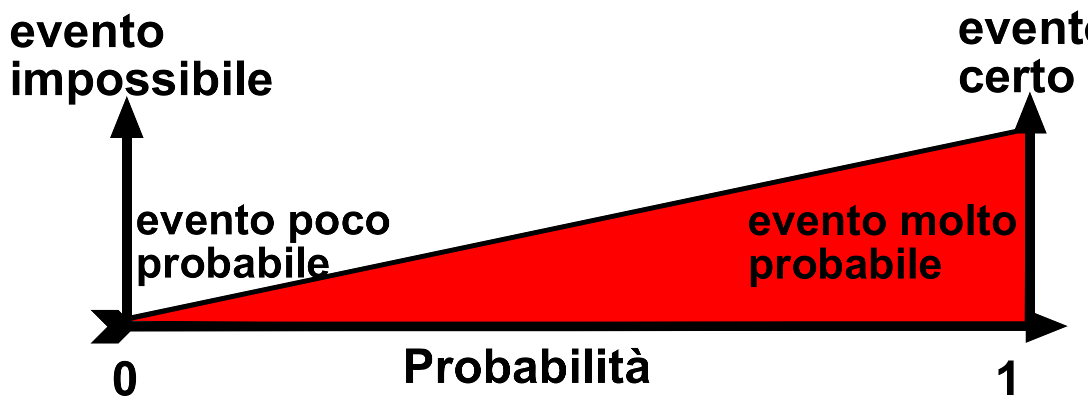
La probabilità è non negativa

2) $P(\Omega)=1$

La probabilità dell'evento certo è pari ad 1

3) $P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$ con $A_1, A_2 \in \Omega$ e $A_1 \cap A_2=\emptyset$

La probabilità è una funzione additiva



Probabilità: <u>Definizione Classica</u> *(Laplace)*

"La probabilità di un evento *A* è pari al rapporto fra i casi favorevoli all'evento e tutti i casi ugualmente possibili"

Limitazioni:

- i casi devono essere <u>ugualmente</u> possibili (equiprobabili)
- è necessario enumerare <u>tutti</u> i casi possibili (indipendentemente da ciò che si è osservato)

Esempio:

P(numero dispari alla roulette) = 18/37

P("testa" nel lancio di una moneta) = 1/2

Probabilità: <u>Definizione Frequentista</u>

(Legge Empirica del Caso)

"La probabilità di un evento A è approssimata dalla frequenza relativa con cui l'evento si manifesta, qualora si ripeta il medesimo esperimento un numero (n) molto elevato di volte"

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_A}{n} = P(A)$$

f_A = frequenza assoluta dell'evento A in n esperimenti

***Limitazioni*:**

- **perchè l'approssimazione sia valida il numero delle ripetizioni dell'esperimento deve essere molto elevato**
- **gli esperimenti devono essere replicati in condizioni identiche**

Esempi:

P(superare l'esame di Stat. Medica con il Prof. Terminator) = 322/736

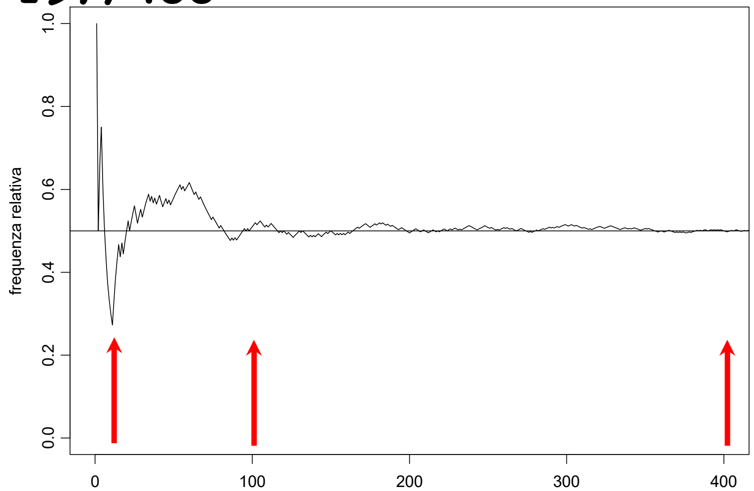
P("croce" nel lancio di una moneta)

P("croce" nel lancio di una moneta 10 volte)=3/10

P("croce" nel lancio di una moneta 100 volte)=47/100

P("croce" nel lancio di una moneta 400 volte)=197/400

Frequenza relativa di "croce" in una successione di 400 lanci di una moneta.



Probabilità: <u>Definizione Soggettivista</u>

(Bayes)

"La probabilità di un evento A misura il grado di fiducia, espresso fra 0 e 1, che un individuo (coerente) attribuisce all'evento A, sulla base delle informazioni in suo possesso"

<u>Limitazioni</u>:

- la probabilità del medesimo evento può variare da soggetto a soggetto
- difficoltà di riuscire a quantificare "il grado di fiducia"

Esempio 1 (def. classica)

Supponiamo di lanciare due dadi non truccati:

- *le sei facce dei due dadi hanno la medesima probabilità di comparire;*
- *un qualsiasi esito del primo dado può manifestarsi in concomitanza con un qualsiasi esito del secondo dado;*
- *l'esito del lancio di un dado non influenza l'esito del lancio del secondo dado.*

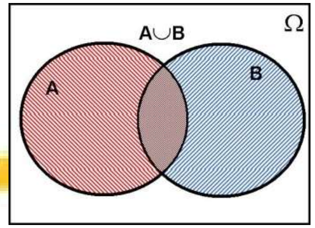
Lo spazio degli eventi – Esempio (1)

Dado 2 (II)

Dado 1 (I)

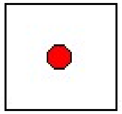
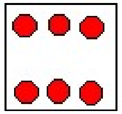
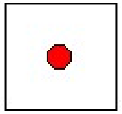
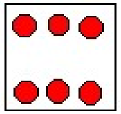
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

… Quesiti …



Esempio 1:

qual è la probabilità che lanciando un dado esca 1 o 6?

P(I=  o I= ) = P(I=  ∪ I= ) = ?

Eventi Incompatibili o Mutamente esclusivi

Esempio 1:

qual è la probabilità che lanciando un dado esca 1 o 6?

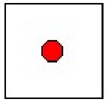
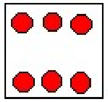
$$P(I=\text{⚀}\ o\ I=\text{⚅}) = P(I=\text{⚀} \cup I=\text{⚅}) = ?$$

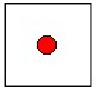
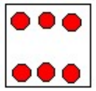
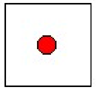
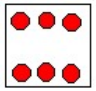
$$P(I=\text{⚀} \cup I=\text{⚅}) = P(I=\text{⚀}) + P(I=\text{⚅}) - P(I=\text{⚀} \cap I=\text{⚅}) =$$

$$= P(I=\text{⚀}) + P(I=\text{⚅}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

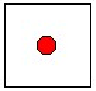
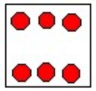
dato che: $P(I=\text{⚀} \cap I=\text{⚅}) = 0$

Eventi Incompatibili

$$P(I=$$  $$\cap\ I=$$  $$)=0$$

I due eventi (I=  **) e (I=**  **) sono incompatibili: il risultato del lancio di un solo dado può fornire un solo esito:**  **o** **.**

Questi due eventi non possono cioè verificarsi contemporaneamente, quando si verifica uno, non può verificarsi l'altro e per definizione sono tali per cui:

$$(I=$$  $$\cap\ I=$$  $$)=\varnothing$$

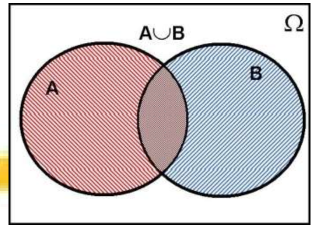
Esempio 2 (def. frequentista)

È stata condotta un'indagine su 1000 studenti che, negli anni precedenti, hanno frequentato la sede universitaria di Monza.
I dati riportati nella tabella a seguire, descrivono la distribuzione del sesso in relazione al curriculum studiorum.

	Diploma Scuola Media Superiore			
Sesso	SC	CL	PR	Totale
F	200	210	20	430
M	300	90	180	570
Totale	500	300	200	1000

SC = indirizzo scientifico; CL = indirizzo classico; PR = indirizzo professionale

… Quesiti …



<u>Esempio 2</u>:

qual è la probabilità che uno studente di Monza sia maschio o abbia una istruzione secondaria di indirizzo scientifico?

$$P(\text{Sesso=M o Scuola=SC}) = P(M \cup SC) = ?$$

Unione di Eventi

L'evento (Sesso=M∪Scuola=SC) ovvero (M∪SC) consiste nell'unione di due eventi semplici:

(Sesso=M), (Scuola=Sc).

Casi favorevoli a (Sesso=M):

➔ gli studenti maschi (indipendentemente dal tipo di scuola);

	Diploma Scuola Media Sup		
Sesso	*SC*	*CL*	*PR*
F			
M	(M∩SC)	(M∩CL)	(M∩PR)

Unione di Eventi

L'evento (Sesso=M$\cup$Scuola=SC) ovvero (M$\cup$SC) consiste nell'unione di due eventi semplici:

(Sesso=M), (Scuola=Sc).

Casi favorevoli a (Scuola=SC):

➔ gli studenti con maturità ad indirizzo scientifico (indipendentemente dal sesso).

	Diploma Scuola Media Sup		
Sesso	*SC*	*CL*	*PR*
F	(F$\cap$SC)		
M	(M$\cap$SC)		

Unione di Eventi

L'evento (Sesso=M∪Scuola=SC) ovvero (M∪SC) consiste nell'unione di due eventi semplici:

(Sesso=M), (Scuola=Sc).

<u>Casi favorevoli</u>:

➔ gli studenti maschi (indipendentemente dal tipo di scuola);

➔ gli studenti con maturità ad indirizzo scientifico (indipendentemente dal sesso).

	Diploma Scuola Media Sup		
Sesso	*SC*	*CL*	*PR*
F	(F∩SC)		
M	(M∩SC)	(M∩CL)	(M∩PR)

Unione di Eventi

$$P(M \cup SC) = P(M) + P(SC) - P(M \cap SC)$$

	Diploma Scuola Media Sup			
Sesso	SC	CL	PR	Tot
F	$(F \cap SC)$			
M	$(M \cap SC)$	$(M \cap CL)$	$(M \cap PR)$	M
Tot	SC			

Se non sottraessi $P(M \cap SC)$ conterei due volte l'intersezione!!

$$P(M \cup SC) = P(M) + P(SC) - P(M \cap SC)$$

Sesso	Diploma Scuola Media Sup SC	CL	PR	Tot
F	0.20			
M	0.30	0.09	0.18	0.57
Tot	0.50			1

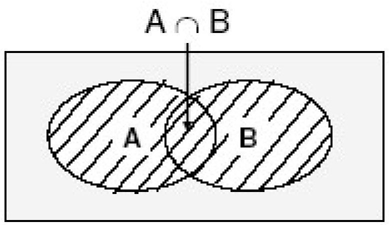
$$P(M \cup SC) = 0.57 + 0.50 - 0.30 = 0.77$$

	SC	CL	PR	T
F	200	210	20	430
M	300	90	180	570
T	500	300	200	1000

…In Conclusione…

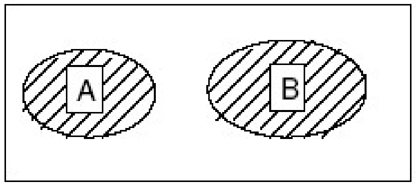
La probabilità dell'unione di due eventi A e B è pari a:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



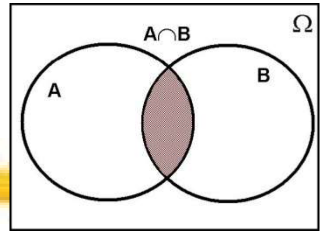
In generale

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$



Se A e B sono incompatibili

Altri Quesiti …



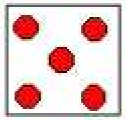
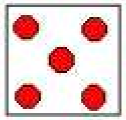
Esempio 2:

qual è la probabilità che uno studente di Monza sia maschio ed abbia una istruzione secondaria di indirizzo scientifico?

$$P(Sesso = M \text{ e } Scuola = SC) = P(M \cap SC) = ?$$

Esempio 1:

qual è la probabilità che i due dadi lanciati mostrino entrambi la faccia con 5 punti?

P(I=  ∩ II= ) = ?

Quesiti …

Esempio 2:

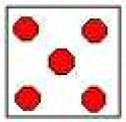
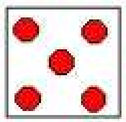
qual è la probabilità che uno studente di Monza sia maschio ed abbia una istruzione secondaria di indirizzo scientifico?

	SC	CL	PR	T
F	200	210	20	430
M	300	90	180	570
T	500	300	200	1000

$$P(M \cap SC) = \frac{n \text{ casi favorevoli}}{n \text{ casi possibili}} = \frac{300}{1000}$$

Esempio 1:

qual è la probabilità che i due dadi lanciati mostrino entrambi la faccia con 5 punti?

P(I=  $\cap$ II= ) = $\frac{n \text{ casi favorevoli}}{n \text{ casi possibili}} = \frac{1}{36}$

Probabilità Condizionata: P(M|SC)

- Qual è la probabilità che uno studente sia maschio?

$$P(Sesso = M) = \frac{570}{1000}$$

- Qual è la probabilità che uno studente sia maschio "dato che" ha frequentato una scuola ad indirizzo scientifico?

	Diploma Scuola Media Superiore	
Sesso	**SC**	**Totale**
F	200	430
M	300	570
Totale	500	1000

Qual è la probabilità che uno studente sia maschio "dato che" ha frequentato una scuola ad indirizzo scientifico?

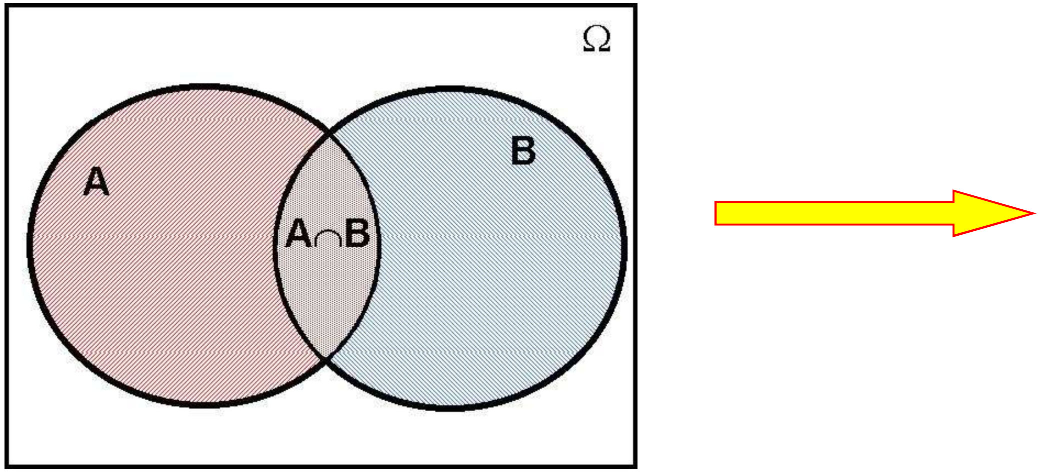
Si fa riferimento alla probabilità che si verifichi un evento (Sesso=M), nell'ipotesi in cui un altro evento si sia già verificato (Scuola=SC).

Tale probabilità è detta probabilità condizionata e viene indicata con la notazione:

$$P(Sesso = M \mid Scuola = SC) = P(M \mid SC)$$

dove il simbolo "|" divide l'evento di interesse da quello condizionante.

Si fa cioè riferimento ad un nuovo spazio campionario Ω^* (ridotto rispetto ad Ω) che coincide con B:



e la probabilità condizionata di *A* dato B è pari a:

$$P(A \mid B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

con $P(B) \neq 0$

Intersezione di Eventi

Dalla definizione di probabilità condizionata si ricava quella di probabilità dell'intersezione di due eventi:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A)}$$

<u>Esempio 2</u>:

qual è la probabilità che uno studente di Monza sia maschio ed abbia una istruzione secondaria di indirizzo scientifico?

Esempio 2: $P(Sesso=M \cap Scuola=SC)=?$

	Diploma Scuola Media Sup	
Sesso	SC	Tot
F		
M	0.3	0.57
Tot	0.5	

	SC	CL	PR	T
F	200	210	20	430
M	300	90	180	570
T	500	300	200	1000

0.3/0.57=0.53

$$P(M \cap SC) = P(M)\,P(SC|M) = 0.57 * 0.53 = 0.30$$

Esempio 2: $P(Sesso=M \cap Scuola=SC)=?$

	Diploma Scuola Media Sup	
Sesso	SC	Tot
F		
M	0.3	0.57
Tot	0.5	

	SC	CL	PR	T
F	200	210	20	430
M	300	90	180	570
T	500	300	200	1000

0.3/0.50=0.60

$$P(M \cap SC) = P(M)P(SC|M) = 0.57 * 0.53 = 0.30$$

$$P(M \cap SC) = P(SC)P(M|SC) = 0.50 * 0.60 = 0.30$$

Eventi Indipendenti

<u>Esempio 1</u>:

Qual è la probabilità che i due dadi lanciati mostrino entrambi la faccia con 5 punti?

P(I= ⚄ ∩ II= ⚄) = ?

P(I= ⚄ ∩ II= ⚄) = P(I= ⚄) P(II= ⚄ | I= ⚄)=

= P(I= ⚄) P(II= ⚄)= $\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

L'esito del primo lancio non apporta alcuna informazione supplementare sull'esito del secondo lancio.

Definizione:

Due eventi A e B (con A, B $\in$ Ω) sono detti indipendenti, ovvero $A \perp B$, se:

- $P(A|B)=P(A)$
- $P(B|A)=P(B)$

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ ***Proprietà di simmetria***

$\Downarrow$

- $P(A \cap B) = P(B) * P(A|B) = P(B) * P(A)$ *oppure*
- $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A) = P(A) * P(B)$

…In Conclusione…

La probabilità dell'intersezione di due eventi A e B è pari a:

In generale:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A)}$$

Se A e B sono indipendenti:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Attenzione

Dati due eventi A e B

Indipendenti: $P(B|A)=P(B)$

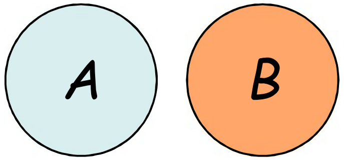
Il verificarsi di A non altera il verificarsi di B.

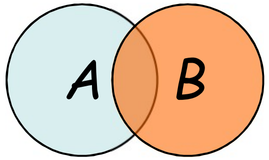
Mutamente esclusivi: $P(B|A)=0$

Il verificarsi di A impedisce il verificarsi di B.

Riepilogando

Dati due eventi A e B





$A \cap B = \varnothing$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cap B) = 0$

$A \cap B \neq \varnothing$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

dove $P(A \cap B)$

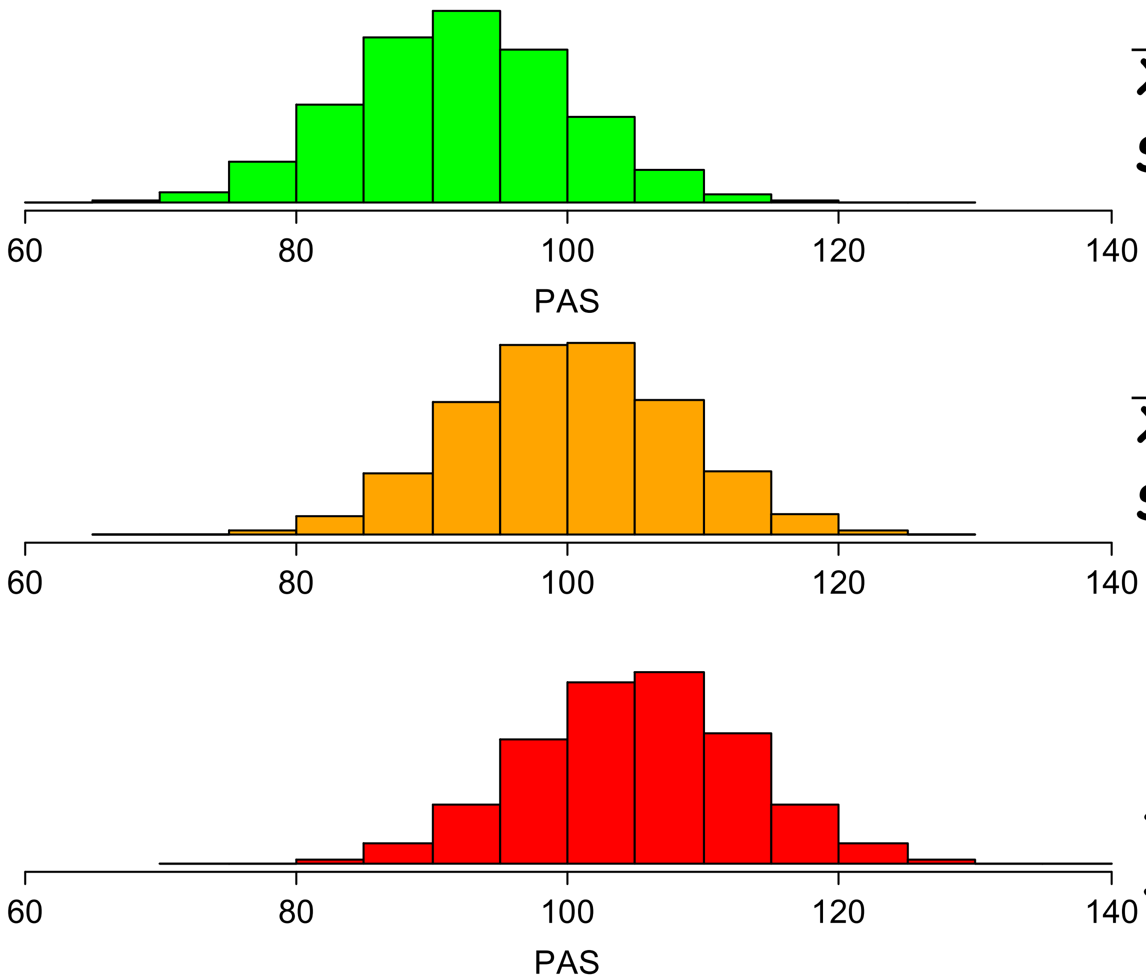
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$
$= P(B) \cdot P(A | B)$

Se A e B sono indipendenti

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilita' Condizionata – variabili continue

PAS e classe ponderale in bambine/bambini di 4 anni



NW

$\bar{x}$=92 mmHg
s =8 mmHg

OW

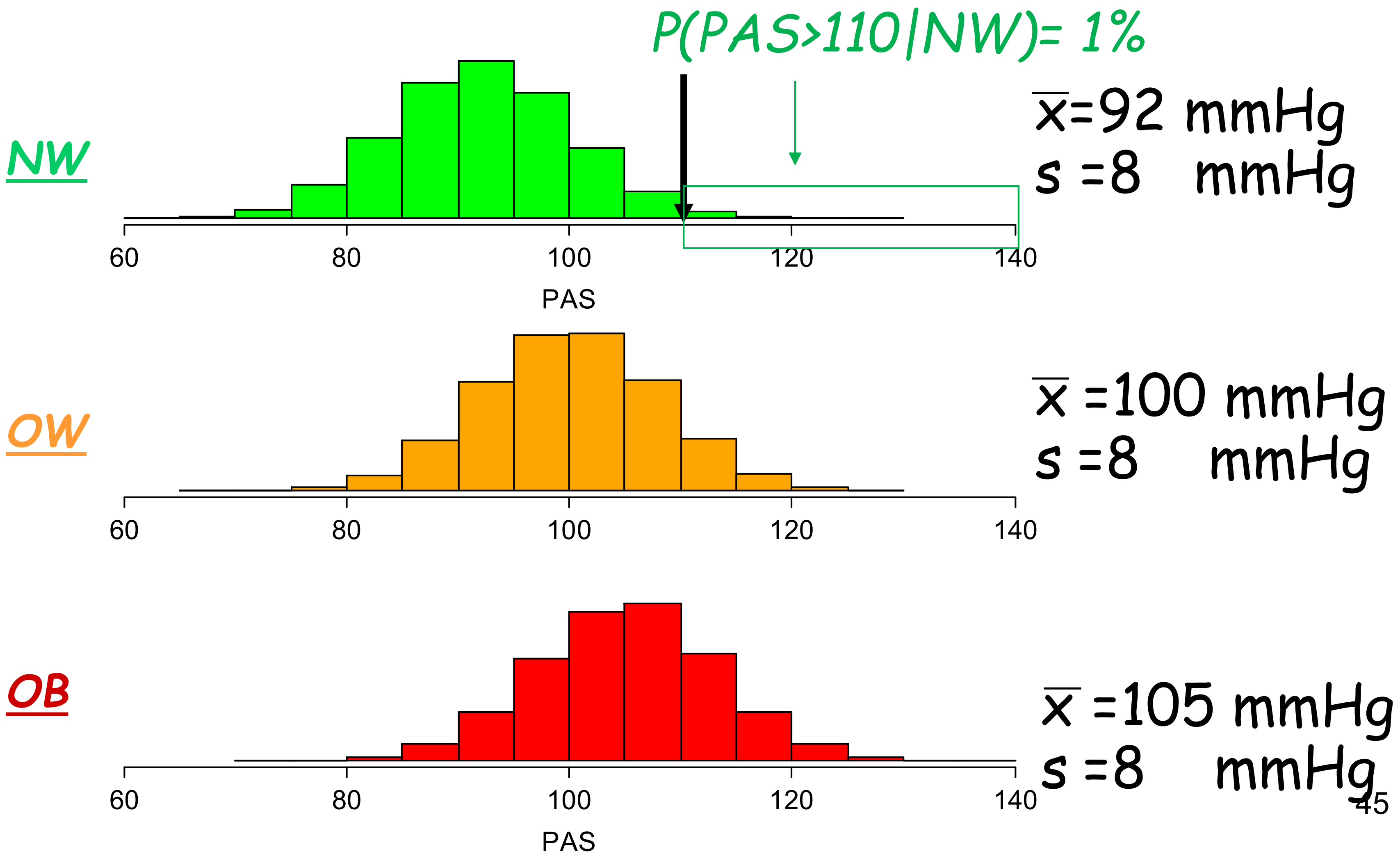
$\bar{x}$ =100 mmHg
s =8 mmHg

OB

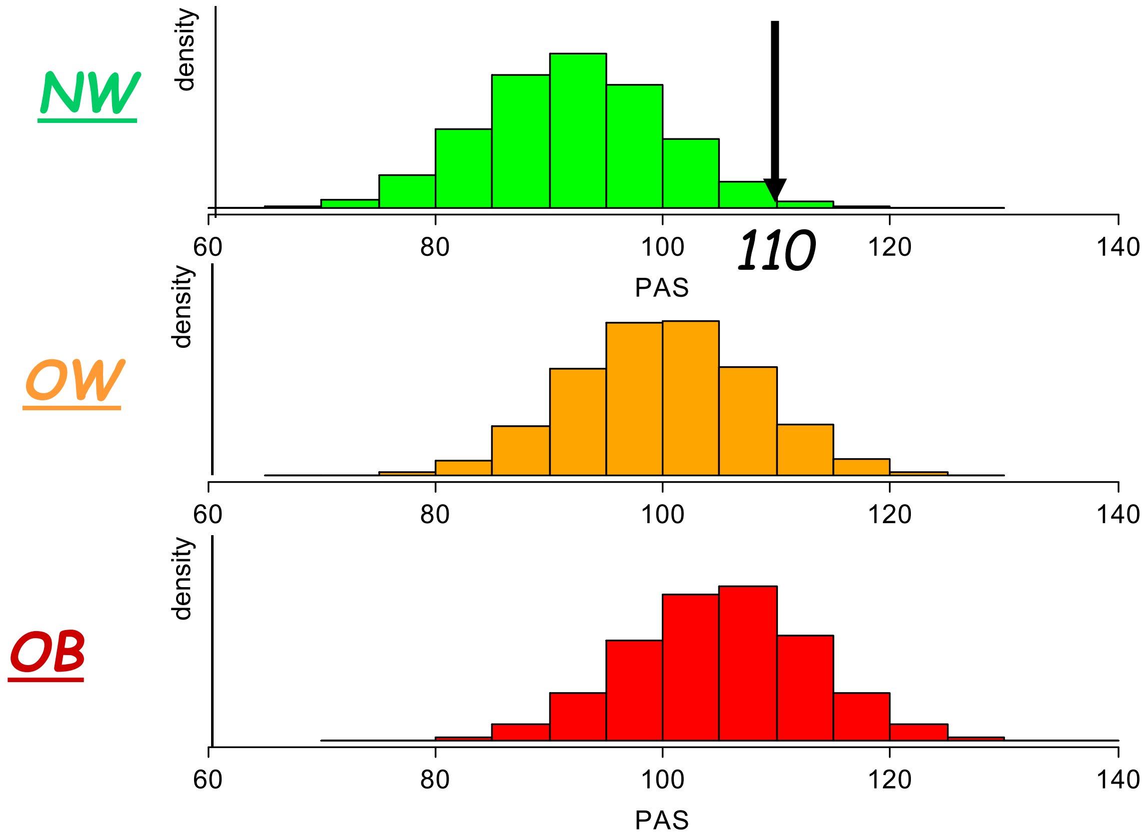
$\bar{x}$ =105 mmHg
s =8 mmHg

Probabilita' Condizionata – variabili continue

PAS e classe ponderale in bambine/bambini di 4 anni

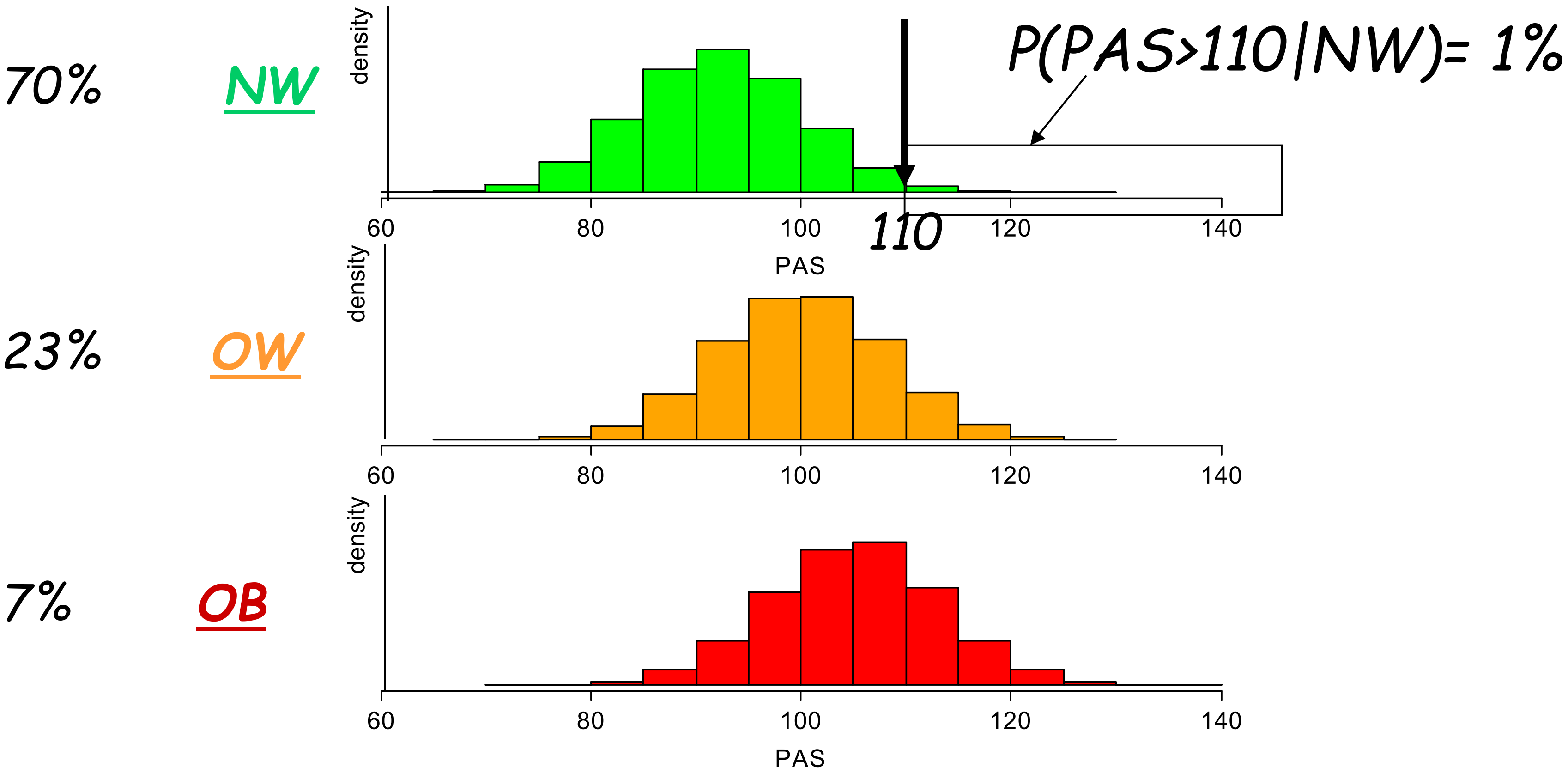


Probabilita' Congiunta - Intersezione



Qual è la probabilità che un bambino sia NW e con PAS > 110 mmHg?

Probabilita' Congiunta - Intersezione



Qual è la probabilità che un bambino sia NW e con PAS > 110 mmHg?

$$P(NW \cap PAS>110) = P(NW) * P(PAS>110 | NW)$$
$$= 0.7 * 0.01 = 0.007 = 0.7\%$$

A sample of 35 patients diagnosed with colon carcinoma in Finland during 1985-94, followed up 10 years

Time (yy)	$S(t_{i+1}\|t_i)$
[0-1)	0.77143
[1-2)	0.92308
[2-3)	0.76190
[3-4)	0.85185
[4-5)	1.00000
[5-6)	1.00000
[6-7)	1.00000
[7-8)	1.00000
[8-9)	0.55556
[9-10)	1.00000

Probabilità di sopravvivere al primo anno dopo la diagnosi

$P(2|1)=P(2 \cap 1)/P(1)$
Probabilità di giungere vivi al secondo anno | si è sopravvissuti al primo

$P(2 \cap 1)=P(2|1)*P(1)$

$P(2)=P(2 \cap 1)=0.7120$
Probabilità di sopravvivere fino al secondo anno

A sample of 35 patients diagnosed with colon carcinoma in Finland during 1985-94, followed up 10 years

Time (yy)	$S(t_{i+1}\|t_i)$
[0-1)	0.77143
[1-2)	0.92308
[2-3)	0.76190
[3-4)	0.85185
[4-5)	1.00000
[5-6)	1.00000
[6-7)	1.00000
[7-8)	1.00000
[8-9)	0.55556
[9-10)	1.00000

Qual è la probabilità di essere ancora vivi dopo 5 anni dalla diagnosi?

$P(5)=P(5|4)*P(4)=$

$P(5|4)*P(4|3)*P(3)=$

$P(5|4)*P(4|3)*P(3|2)*P(2|1)*P(1)=$

0.46216

A sample of 35 patients diagnosed with colon carcinoma in Finland during 1985-94, followed up 10 years

Time (yy)	$S(t_{i+1}\|t_i)$
[0-1)	0.77143
[1-2)	0.92308
[2-3)	0.76190
[3-4)	0.85185

Qual è la probabilità di essere ancora vivi dopo 10 anni dalla diagnosi, dato che si è sopravvissuti i primi 5?

$P(10|5) = P(10 \cap 5)/P(5) = P(10)/P(5) =$

$P(10|9)*P(9|8)*P(8|7)*P(7|6)*P(6/5)*P(5|4)*P(4|3)*P(3|2)*P(2|1)*P(1)/$

$P(5|4)*P(4|3)*P(3|2)*P(2|1)*P(1)=$

$P(10|9)*P(9|8)*P(8|7)*P(7|6)*P(6/5)= 0.55556$

Esercizio

Il principale obiettivo di uno studio di Carter et al. era di indagare l'effetto dell'età all'inizio dei disturbi bipolari durante la malattia. Una delle variabili investigate era la storia familiare dei disturbi dell'umore. In tabella è mostrata la frequenza della storia familiare dei disturbi dell'umore in due gruppi in studio (i *giovani*, *G*, definiti con un'età di 18 anni, gli *adulti*, *A*, con un'età >18 anni).

Storia familiare	***G***	***A***	**Totale**
Storia negativa (S)	28	35	63
Disturbi bipolari	19	38	57
Disturbi unipolari	41	44	85
Disturbi unipolari e bipolari	53	60	113
Totale	141	177	318

Quesiti

1. Selezionato un individuo a caso, qual è la probabilità che abbia 18 anni?
2. Sapendo di aver selezionato un soggetto del gruppo di 18 anni, qual è la probabilità che questo soggetto non abbia una storia familiare per disturbi dell'umore?
3. Qual è la probabilità che, estratta a caso una persona tra i 318 soggetti, sia un giovane (G) e sia una persona che non ha una storia familiare di disturbi dell'umore (S)?
4. Se scegliamo un soggetto a caso tra i 318 soggetti, qual è la probabilità che questo soggetto sia giovane (G) o non abbia una storia familiare per disturbi dell'umore (S) o entrambi?

Soluzioni

1. $P(G) = 141/318 = 0.4434$
2. $P(S|G) = 28/141 = 0.1986$
3. $P(G \cap S) = 28/318 = 0.0881$
4. $P(G \cup S) = P(G)+P(S)- P(G \cap S) =$
   $0.4434+0.1981-0.0881 = 0.5534$