TEMA N. **1**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(3n)!}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$a)$ converge assolutamente; $b)$ diverge a $+\infty$; $c)$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(-3+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+5} dx.$$

a) $\frac{23}{21}$, *b)* $\cos 3 - \cos 2$, *c)* $1 + 5\log\frac{5}{6}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -1

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}{\log(1+x^3)-\sin(x^3)+\frac{1}{2}x^6}.$$

Risposta: $\frac{19}{10}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \ldots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{4z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $2 + \sqrt{3}$

TEMA N. **2**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^5-n+5}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

$a)$ diverge a $+\infty$; $b)$ converge assolutamente; $c)$ converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}\right)dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(-2+\log x)}{x}dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+4}dx.$$

a) $\frac{23}{20}$, *b)* $\cos 2-\cos 1$, *c)* $1+4\log\frac{4}{5}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(3x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{2\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) $-1/2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x^3)-2\sin(x^3)+x^6}{x^7-12(\arctan x-x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)}.$$

Risposta: $-\frac{20}{19}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\ldots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x)\mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{6z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $3 + \sqrt{8}$

TEMA N. **3**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n!}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

a) converge assolutamente; *b*) converge assolutamente; *c*) converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a)\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}+x\sqrt[4]{x}\right)dx, \qquad b)\int_1^e \frac{\sin(2+\log x)}{x}dx, \qquad c)\int_0^1 \frac{x}{x+3}dx.$$

a) $\frac{43}{36}$, *b)* $\cos 2-\cos 3$, *c)* $1+3\log\frac{3}{4}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a)\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c)\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\sin x-\cos x)}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{12(\arctan x-x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}{\log(1+x^2)-\sin(x^2)+\frac{1}{2}x^4}.$$

Risposta: 0.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x)\mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{8z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $4 + \sqrt{15}$

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \log n}{n^4 - n + 5}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

$a)$ diverge a $+\infty$; $b)$ diverge a $+\infty$; $c)$ converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt[4]{x} + x\sqrt[3]{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(3 + \log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+2} dx.$$

a) $\frac{43}{35}$, *b)* $\cos 3 - \cos 4$, *c)* $1 + 2\log\frac{2}{3}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4} - (x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5} - (x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{3+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\log(1+2x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) 1/2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}x}{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4} - 1) - x^7}.$$

Risposta: $+\infty$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \ldots$ è assegnata la funzione $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{10z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $5 + \sqrt{24}$

TEMA N. **5**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(3n)!}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$a)$ converge assolutamente; $b)$ diverge a $+\infty$; $c)$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt[4]{x} + x\sqrt[3]{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(3+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+2} dx.$$

a) $\frac{43}{35}$, *b)* $\cos 3 - \cos 4$, *c)* $1 + 2\log\frac{2}{3}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4} - (x^2+1)^{1/3}}{(3x^4+2)^{1/5} - (x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{2\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) $-1/2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1) - x^7}{\log(1+x^3) - \sin(x^3) + \frac{1}{2}x^6}.$$

Risposta: $\frac{19}{10}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0, 1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{8z}{1 + z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $4 + \sqrt{15}$

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+\log n}{n^5-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

$a)$ diverge a $+\infty$; $b)$ converge assolutamente; $c)$ converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a)\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}+x\sqrt[4]{x}\right)dx, \qquad b)\int_1^e \frac{\sin(2+\log x)}{x}dx, \qquad c)\int_0^1 \frac{x}{x+3}dx.$$

a) $\frac{43}{36}$, *b)* $\cos 2-\cos 3$, *c)* $1+3\log\frac{3}{4}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a)\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c)\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\sin x-\cos x)}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sqrt{x})-\sin(\sqrt{x})+\frac{1}{2}x}{12(\arctan x-x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}.$$

Risposta: $+\infty$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x)\mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{10z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $5 + \sqrt{24}$

TEMA N. **7**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n!}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$a)$ converge assolutamente; $b)$ converge assolutamente; $c)$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(-2+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+4} dx.$$

a) $\frac{23}{20}$, *b)* $\cos 2 - \cos 1$, *c)* $1 + 4\log\frac{4}{5}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{3+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{\log(1+2x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) 1/2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}{\log(1+x^2)-\sin(x^2)+\frac{1}{2}x^4}.$$

Risposta: 0.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \ldots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0, 1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max \{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{4z}{1 + z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $2 + \sqrt{3}$

TEMA N. **8**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

$a)$ diverge a $+\infty$; $b)$ diverge a $+\infty$; $c)$ converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(-3+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+5} dx.$$

a) $\frac{23}{21}$, *b)* $\cos 3-\cos 2$, *c)* $1+5\log\frac{5}{6}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -1

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x^3)-2\sin(x^3)+x^6}{x^7-12(\arctan x-x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)}.$$

Risposta: $-\frac{20}{19}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0, 1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{6z}{1 + z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $3 + \sqrt{8}$

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(3n)!}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$a)$ converge assolutamente; $b)$ diverge a $+\infty$; $c)$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a)\int_0^1 \left(\sqrt[4]{x}+x\sqrt[3]{x}\right)dx, \qquad b)\int_1^e \frac{\sin(3+\log x)}{x}dx, \qquad c)\int_0^1 \frac{x}{x+2}dx.$$

a) $\frac{43}{35}$, *b)* $\cos 3-\cos 4$, *c)* $1+2\log\frac{2}{3}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a)\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(3x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c)\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{2\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) $-1/2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{12(\arctan x-x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}{\log(1+x^3)-\sin(x^3)+\frac{1}{2}x^6}.$$

Risposta: $\frac{19}{10}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\ldots$ è assegnata la funzione $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x)\mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{8z}{1 + z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $4 + \sqrt{15}$

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+\log n}{n^5-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

a) diverge a $+\infty$; b) converge assolutamente; c) converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a)\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}+x\sqrt[4]{x}\right)dx, \qquad b)\int_1^e\frac{\sin(2+\log x)}{x}dx, \qquad c)\int_0^1\frac{x}{x+3}dx.$$

a) $\frac{43}{36}$, *b)* $\cos 2-\cos 3$, *c)* $1+3\log\frac{3}{4}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a)\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c)\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\sin x-\cos x)}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sqrt{x})-\sin(\sqrt{x})+\frac{1}{2}x}{12(\arctan x-x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}.$$

Risposta: $+\infty$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x)\mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{10z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $5 + \sqrt{24}$

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n!}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$a)$ converge assolutamente; $b)$ converge assolutamente; $c)$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(-2+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+4} dx.$$

a) $\frac{23}{20}$, *b)* $\cos 2 - \cos 1$, *c)* $1 + 4\log\frac{4}{5}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{3+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{\log(1+2x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) 1/2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}{\log(1+x^2)-\sin(x^2)+\frac{1}{2}x^4}.$$

Risposta: 0.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \ldots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{4z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $2 + \sqrt{3}$

TEMA N. **12**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

$a)$ diverge a $+\infty$; $b)$ diverge a $+\infty$; $c)$ converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(-3+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+5} dx.$$

a) $\frac{23}{21}$, *b)* $\cos 3 - \cos 2$, *c)* $1+5\log\frac{5}{6}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -1

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\log(1+x^3)-2\sin(x^3)+x^6}{x^7-12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)}.$$

Risposta: $-\frac{20}{19}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \ldots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0, 1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{6z}{1 + z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $3 + \sqrt{8}$

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(3n)!}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$a)$ converge assolutamente; $b)$ diverge a $+\infty$; $c)$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a)\int_0^1 \left(\sqrt[4]{x}+x\sqrt[3]{x}\right)dx, \qquad b)\int_1^e \frac{\sin(3+\log x)}{x}dx, \qquad c)\int_0^1 \frac{x}{x+2}dx.$$

a) $\frac{43}{35}$, *b)* $\cos 3-\cos 4$, *c)* $1+2\log\frac{2}{3}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a)\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(3x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c)\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{2\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) $-1/2$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}{\log(1+x^3)-\sin(x^3)+\frac{1}{2}x^6}.$$

Risposta: $\frac{19}{10}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x)\mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{8z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $4 + \sqrt{15}$

TEMA N. **14**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^5-n+5}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

$a)$ diverge a $+\infty$; $b)$ converge assolutamente; $c)$ converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} + x\sqrt[4]{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(2+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+3} dx.$$

a) $\frac{43}{36}$, *b)* $\cos 2 - \cos 3$, *c)* $1 + 3\log\frac{3}{4}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x^5+2)^{1/4} - (x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5} - (x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x\to0} \frac{2(1+\sin x - \cos x)}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}x}{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1) - x^7}.$$

Risposta: $+\infty$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0, 1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max \{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{10z}{1 + z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $5 + \sqrt{24}$

TEMA N. **15**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n!}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

a) converge assolutamente; *b*) converge assolutamente; *c*) converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a)\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}\right)dx, \qquad b)\int_1^e \frac{\sin(-2+\log x)}{x}dx, \qquad c)\int_0^1 \frac{x}{x+4}dx.$$

a) $\frac{23}{20}$, *b)* $\cos 2-\cos 1$, *c)* $1+4\log\frac{4}{5}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a)\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{3+2x}, \quad c)\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{\log(1+2x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) 1/2

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)-x^7}{\log(1+x^2)-\sin(x^2)+\frac{1}{2}x^4}.$$

Risposta: 0.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n=1,2,\dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x\in[0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x)\mid x\in[0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon>0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n>N$ e per ogni $x\in[0,1]$ risulti $|f_n(x)|<\varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0,1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{4z}{1+z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $2 + \sqrt{3}$

TEMA N. **16**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 31/01/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si discuta il carattere di due delle seguenti tre serie (precisando, nel caso di convergenza, se si tratta di convergenza assoluta).

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\log n}{n^4-n+5}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

a) diverge a $+\infty$; *b*) diverge a $+\infty$; *c*) converge assolutamente.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di 2 tra i seguenti 3 integrali definiti.

$$a) \int_0^1 \left(\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}\right) dx, \qquad b) \int_1^e \frac{\sin(-3+\log x)}{x} dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x}{x+5} dx.$$

a) $\frac{23}{21}$, *b)* $\cos 3 - \cos 2$, *c)* $1 + 5\log\frac{5}{6}$.

Esercizio 3. (5 punti) Calcolare due dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^5+2)^{1/4}-(x^2+1)^{1/3}}{(x^4+2)^{1/5}-(x^3+1)^{1/2}}, \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4+x}{1+x}\right)^{4+2x}, \quad c) \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{\log(1-x)}.$$

a) 0, b) e^6, c) -1

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x^3)-2\sin(x^3)+x^6}{x^7-12(\arctan x - x\cos x)(\sqrt{1+x^4}-1)}.$$

Risposta: $-\frac{20}{19}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni numero naturale $n = 1, 2, \dots$ è assegnata la funzione $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

a) Per ogni $x \in [0,1]$, si calcoli il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si determini il valore di $\max\{f_n(x) \mid x \in [0,1]\}$.

c) Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato, esiste un numero naturale N tale che per ogni $n > N$ e per ogni $x \in [0,1]$ risulti $|f_n(x)| < \varepsilon$.

a) Se $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Se $x \neq 0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il limite è uguale a zero per ogni $x \in [0, 1]$. b) Con un facile calcolo si trova

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Si ha che $f_n'(x) \geq 0$ se $x \in [0, 1/n]$ e $f_n'(x) \leq 0$ se $x \in [1/n, 1]$; quindi la funzione f_n è crescente in $[0, 1/n]$, decrescente in $[1/n, 1]$ e ha un punto di massimo assoluto in $x = 1/n$. Pertanto $\max \{f_n(x) \mid x \in [0, 1]\} = f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$. c) Dal punto b) deduciamo che $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$. Basta allora scegliere un numero naturale $N > \frac{1}{2\varepsilon}$ per concludere.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Determinare il valore dell'estremo superiore dell'insieme $E \subset \mathbb{R}$ definito da

$$E = \left\{ |z| \mid z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \frac{6z}{1 + z^2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Risposta: $3 + \sqrt{8}$