TEMA N. **1**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = i(z-1), \qquad b)\quad z^2\overline{z} = z, \qquad c)\quad z^3 = 1.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = \frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \quad b)\quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c)\quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{9}{4}(x-1)$, *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\int_0^\pi x\sin x\,dx, \qquad c)\int_0^{\log 2} e^x\sqrt{7+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\log 2$, b) π, c) $18 - \frac{32}{3}\sqrt{2}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = z - i, \qquad b) \quad z^3\overline{z} = z, \qquad c) \quad z^3 = -1.$$

a) $\left\{z \mid Im(z) = \frac{1}{2}\right\}$; *b)* $\{0, 1\}$; *c)* $\left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = \frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{7\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = 3 + \frac{\pi}{4} - \frac{19}{6}(x-1)$, *b)* $y = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{2+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{2}$, b) -2π, c) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^4}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^6}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1/2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{4}{x-2}} + e^{\frac{2}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e^2$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t\, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t\, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t)\, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **3**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = i(z-2), \qquad b)\quad z^2\overline{z} = z, \qquad c)\quad z^3 = 8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = -\frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \qquad b)\quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \qquad c)\quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

$a)\ y = -2 + \frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}(x-1)$, $\qquad b)\ y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}(x-1)$, $\qquad c)\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 \frac{x+4}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\int_{\pi/2}^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c)\int_0^{\log 2} e^x\sqrt{3+e^x}\,dx.$$

a) $\pi + \frac{1}{2}\log 2$, b) $-2\pi - 1$, c) $\frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{16}{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^{3/2}}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,2]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R}\setminus\{0,2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{3}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e^3}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. **(8 punti)** Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t \Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = i(z-3), \qquad b) \quad z^3|z| = z, \qquad c) \quad z^3 = -8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{0, 1, -1\}$; $c)$ $\left\{-2, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = -\frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right)\right|.$$

$a)\ y = -3 + \frac{\pi}{4} + \frac{17}{6}(x-1)$, $\qquad b)\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{18}(x-1)$, $\qquad c)\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x-4}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_{\pi/2}^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{8+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \pi$, b) $\pi - 1$, c) $\frac{20}{3}\sqrt{10} - 18$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{2}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{2}{x-2}} + e^{\frac{5}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **5**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = i(z-1), \qquad b)\quad z^2\overline{z} = z, \qquad c)\quad z^3 = 1.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = -\frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b)\quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \quad c)\quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = -3 + \frac{\pi}{4} + \frac{17}{6}(x-1)$, *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{18}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{2+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{2}$, b) -2π, c) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{3}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e^3}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **6**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = z - i, \qquad b) \quad z^3\overline{z} = z, \qquad c) \quad z^3 = -1.$$

$a)$ $\left\{z \mid Im(z) = \frac{1}{2}\right\}$; $b)$ $\{0, 1\}$; $c)$ $\left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = -\frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

$a)$ $y = -2 + \frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}(x-1)$, $\qquad b)$ $y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}(x-1)$, $\qquad c)$ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x+4}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_{\pi/2}^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{3+e^x}\,dx.$$

a) $\pi + \frac{1}{2}\log 2$, b) $-2\pi - 1$, c) $\frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{16}{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{2}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{2}{x-2}} + e^{\frac{5}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **7**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = i(z-2), \qquad b)\quad z^2\overline{z} = z, \qquad c)\quad z^3 = 8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = \frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b)\quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c)\quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{7\pi}{4}x\right)\right|.$$

$a)$ $y = 3 + \frac{\pi}{4} - \frac{19}{6}(x-1)$, $\qquad b)$ $y = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(x-1)$, $\qquad c)$ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad c)\int_0^{\log 2} e^x\sqrt{8+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \pi$, b) $\pi - 1$, c) $\frac{20}{3}\sqrt{10} - 18$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^{3/2}}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,2]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R}\setminus\{0,2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **8**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = i(z-3), \qquad b) \quad z^3|z| = z, \qquad c) \quad z^3 = -8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{0, 1, -1\}$; $c)$ $\left\{-2, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = \frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{9}{4}(x-1)$, *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{7+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\log 2$, b) π, c) $18 - \frac{32}{3}\sqrt{2}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^4}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^6}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1/2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{4}{x-2}} + e^{\frac{2}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e^2$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t\, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t\, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t)\, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = i(z-1), \qquad b)\quad z^2\overline{z} = z, \qquad c)\quad z^3 = 1.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = -\frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b)\quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \quad c)\quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = -3 + \frac{\pi}{4} + \frac{17}{6}(x-1)$, *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{18}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_0^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{2+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{2}$, b) -2π, c) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0, 1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{3}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e^3}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **10**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = z - i, \qquad b) \quad z^3\overline{z} = z, \qquad c) \quad z^3 = -1.$$

$a)$ $\left\{z \mid Im(z) = \frac{1}{2}\right\}$; $b)$ $\{0, 1\}$; $c)$ $\left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = -\frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = -2 + \frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}(x-1)$, *b)* $y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x+4}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_{\pi/2}^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{3+e^x}\,dx.$$

a) $\pi + \frac{1}{2}\log 2$, b) $-2\pi - 1$, c) $\frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{16}{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{2}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0, 1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{2}{x-2}} + e^{\frac{5}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = i(z-2), \qquad b) \quad z^2\overline{z} = z, \qquad c) \quad z^3 = 8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = \frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{7\pi}{4}x\right)\right|.$$

$a)$ $y = 3 + \frac{\pi}{4} - \frac{19}{6}(x-1)$, $\qquad b)$ $y = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(x-1)$, $\qquad c)$ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x-4}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x\, dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{8+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \pi$, b) $\pi - 1$, c) $\frac{20}{3}\sqrt{10} - 18$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^{3/2}}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,2]$ diverge.
Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0,2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. **(8 punti)** Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t\, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0,\pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t\, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t)\, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0,\pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1,\pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **12**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = i(z-3), \qquad b) \quad z^3|z| = z, \qquad c) \quad z^3 = -8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{0, 1, -1\}$; $c)$ $\left\{-2, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = \frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

$a)\ y = 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{9}{4}(x-1)$, $\qquad b)\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9}(x-1)$, $\qquad c)\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{7+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\log 2$, b) π, c) $18 - \frac{32}{3}\sqrt{2}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^4}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^6}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1/2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R}\setminus\{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{4}{x-2}} + e^{\frac{2}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e^2$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **13**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = i(z-1), \qquad b)\quad z^2\overline{z} = z, \qquad c)\quad z^3 = 1.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = -\frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b)\quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \quad c)\quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = -3 + \frac{\pi}{4} + \frac{17}{6}(x-1)$, *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{18}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 \frac{x-2}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c)\int_0^{\log 2} e^x\sqrt{2+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{2}$, b) -2π, c) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R}\setminus\{0,2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{3}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e^3}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = z - i, \qquad b)\quad z^3\overline{z} = z, \qquad c)\quad z^3 = -1.$$

$a)$ $\left\{z \mid Im(z) = \frac{1}{2}\right\}$; $b)$ $\{0, 1\}$; $c)$ $\left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = -\frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \quad b)\quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5+x^4}\right), \quad c)\quad f_3(x) = \left|\cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

$a)$ $y = -2 + \frac{\pi}{4} + \frac{7}{4}(x-1)$, $\qquad b)$ $y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}(x-1)$, $\qquad c)$ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 \frac{x+4}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\int_{\pi/2}^{2\pi} x\sin x\,dx, \qquad c)\int_0^{\log 2} e^x\sqrt{3+e^x}\,dx.$$

a) $\pi + \frac{1}{2}\log 2$, b) $-2\pi - 1$, c) $\frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{16}{3}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{2}{n^\alpha}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0, 1]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R}\setminus\{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{2}{x-2}} + e^{\frac{5}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **15**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a) \quad \overline{z} = i(z-2), \qquad b) \quad z^2\overline{z} = z, \qquad c) \quad z^3 = 8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{z \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$; $c)$ $\left\{2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a) \quad f_1(x) = \frac{3}{x} + \arctan\frac{3}{2+x}, \quad b) \quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c) \quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{7\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = 3 + \frac{\pi}{4} - \frac{19}{6}(x-1)$, *b)* $y = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \frac{x-4}{x^2+1}\,dx, \qquad b) \int_{\pi/2}^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad c) \int_0^{\log 2} e^x\sqrt{8+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}\log 2 - \pi$, b) $\pi - 1$, c) $\frac{20}{3}\sqrt{10} - 18$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Motivando la risposta con uno svolgimento chiaro, sintetico e motivato, si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^{3/2}}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0,2]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = \sqrt{e}$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t\, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t\, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t)\, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t)\, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.

TEMA N. **16**

Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2022

PRIMA PARTE

In ciascuno degli esercizi proposti, si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti equazioni, si descriva l'insieme delle soluzioni e, nel caso sia non vuoto, lo si rappresenti sul piano complesso (di Gauss):

$$a)\quad \overline{z} = i(z-3), \qquad b)\quad z^3|z| = z, \qquad c)\quad z^3 = -8.$$

$a)$ nessuna soluzione; $b)$ $\{0, 1, -1\}$; $c)$ $\left\{-2, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i\right\}$.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$ di due (e non più di due) tra le seguenti tre funzioni

$$a)\quad f_1(x) = \frac{2}{x} + \arctan\frac{2}{1+x}, \quad b)\quad f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2+x^4}\right), \quad c)\quad f_3(x) = \left|\sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right)\right|.$$

a) $y = 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{9}{4}(x-1)$, *b)* $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9}(x-1)$, *c)* $y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{4\sqrt{2}}(x-1)$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\,dx, \qquad b)\int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad c)\int_0^{\log 2} e^x\sqrt{7+e^x}\,dx.$$

a) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\log 2$, b) π, c) $18 - \frac{32}{3}\sqrt{2}$

Parte B

Esercizio 4. (5 punti) Si determini il carattere della serie numerica al variare del parametro $\alpha \geq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) - \cos\left(\frac{1}{n^4}\right) + \sqrt{1+\frac{1}{n^6}}\right)$$

Risposta: Per $\alpha > 1/2$ converge assolutamente, per $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ diverge.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : E \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$E = \mathbb{R}\setminus\{0,2\}, \qquad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{4}{x-2}} + e^{\frac{2}{x}}}$$

e sia $D = \{f(x) \mid x \in E\}$ la sua immagine.

a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme D. È anche un minimo?

b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme D. È anche un massimo?

Risposta: $\inf D = 0$, non è minimo. $\sup D = e^2$, non è massimo.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Si consideri la successione reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_0^{x_n} \cos t \, dt, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

a) Si dimostri che $0 < x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

b) Si dimostri che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e si determini il valore del limite $\lim_{n\to\infty} x_n$.

c) Si discuta il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$. (**Suggerimento:** si usi il criterio del rapporto.)

a) Ragioniamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0$, $x_n = x_0 = 1 \in (0, \pi)$, quindi la base di induzione è verificata. Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che $0 < x_n < \pi$. Allora, essendo $1 + \cos t \geq 0$ per ogni t e $1 + \cos t \not\equiv 0$ in $[0, x_n]$, si ha che

$$x_{n+1} = x_n + \int_0^{x_n} \cos t \, dt = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt > 0;$$

inoltre, per additività,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \int_0^{x_n} (1 + \cos t) \, dt &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt - \int_{x_n}^{\pi} (1 + \cos t) \, dt \\ &< \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \, dt = \Big[t + \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Quindi $0 < x_{n+1} < \pi$ e il passo induttivo è completato.

b) Osserviamo che $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Essendo $x_n \in (0, \pi)$ per il punto a), si ha che $\sin x_n > 0$ e quindi $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Concludiamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata e strettamente crescente, quindi convergente. Detto $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ il suo limite, per monotonia si ha che $1 = x_0 \leq x_n < \pi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi, per il Teorema del Confronto per i limiti, $1 \leq L \leq \pi$; inoltre dalla continuità della funzione $x \mapsto \sin x$ segue che

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \sin x_n) = L + \sin L.$$

Quindi $\sin L = 0$ con $L \in [1, \pi]$, da cui necessariamente segue che $L = \pi$.

c) Notiamo che $a_n = \pi - x_n > 0$ per il punto precedente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ è a termini (strettamente) positivi. Si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi - x_{n+1}}{\pi - x_n} = \frac{\pi - x_n - \sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin x_n}{\pi - x_n} = 1 - \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(\pi - x_n) = 0$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi - x_n)}{\pi - x_n} = 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - 1 = 0 < 1.$$

Per il criterio del rapporto possiamo così concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - x_n)$ converge.