Analisi Matematica I. Prova scritta del 27 giugno 2022. TEMA N. **1**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1 + \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = 1.$$

$a)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{15}$; $b)$ 1; $c)$ 32.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \left(e - x^2 e^x\right)\,dx, \qquad b) \int_0^1 \left(e - 2xe^{x^2}\right)\,dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.$$

a) 2, b) 1, c) $\log 2 - \frac{1}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\mathrm{Re}\, z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + i$?	$-2 + i$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_6 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_6 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

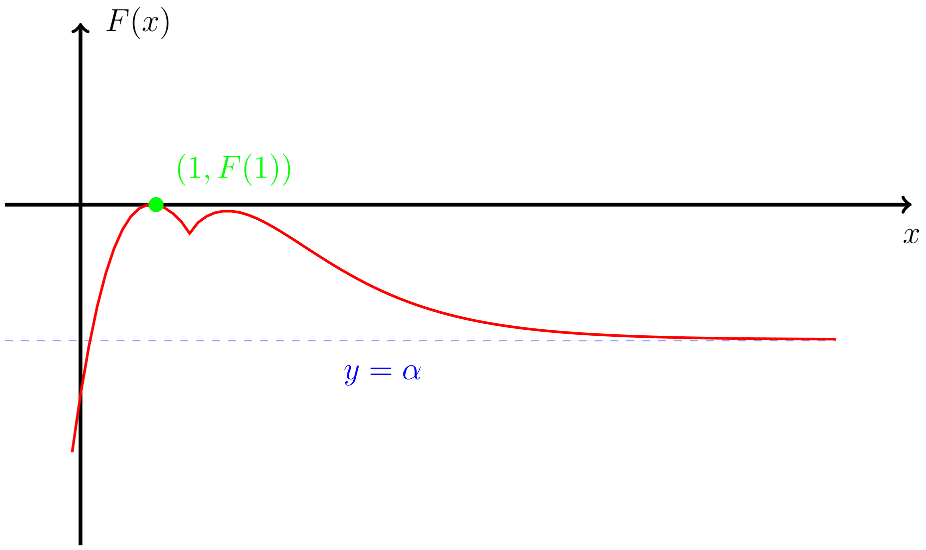
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x=1$, $x=2$ o entrambi. Poiché $F(1)=0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) = \int_1^2 f(t)\,dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x=1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Analisi Matematica I. Prova scritta del 27 giugno 2022. TEMA N. **2**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{6}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -1.$$

$a)$ $-\frac{\sqrt{3}}{21}$; $b)$ 2; $c)$ 0.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^4+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \left(x^2 e^x - e\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(2x e^{x^2} - e\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x-2}\, dx.$$

a) -2, b) -1, c) $\frac{5}{2} - 4\log 2$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Re} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 2 + i$?	-2
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_9 x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_9 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_9 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto *c*) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^\pm} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

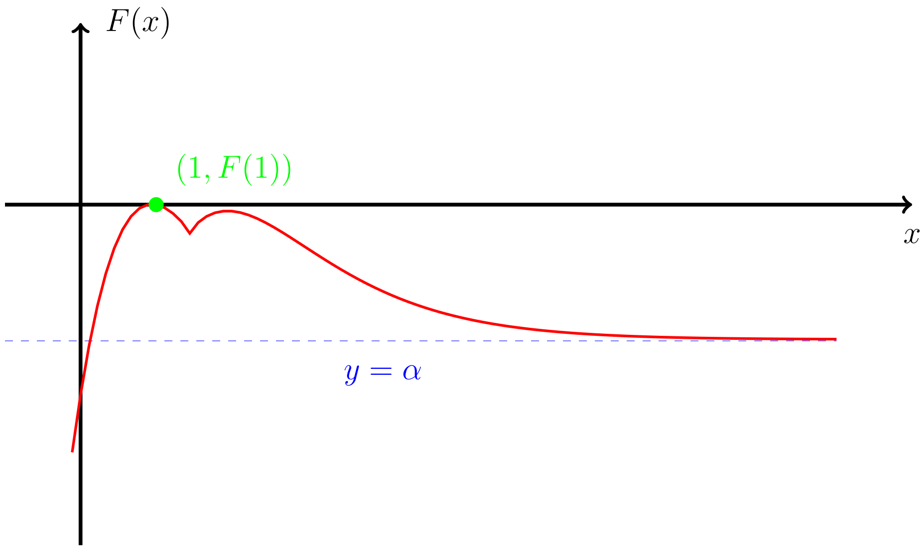
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} F\left(x\right) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1 + \cos^2\left(\frac{2}{3}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+3x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -2.$$

$a)$ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$; $b)$ 3; $c)$ -2.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^5}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) converge assolutamente, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 e \cdot x \left(e^x - e^{-x}\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(2xe^{-x^2} + \frac{1}{e}\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\, dx.$$

a) 2, b) 1, c) $4 \log \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + 2i$?	$-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_6 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_6 = -8/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2} e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2} e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

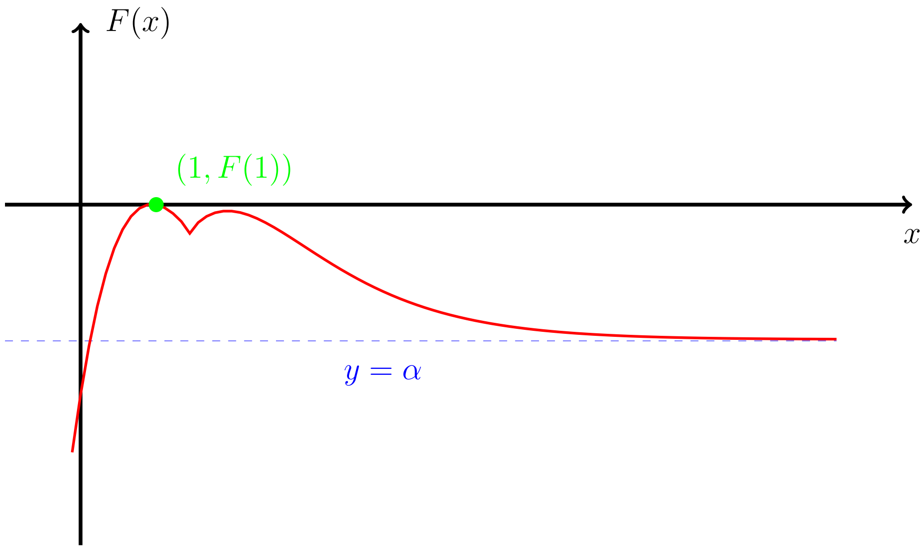
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x=1$, $x=2$ o entrambi. Poiché $F(1)=0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$
\begin{aligned}
F(2) = \int_1^2 f(t)\, dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\, dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\, dt < 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $x=1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Analisi Matematica I. Prova scritta del 27 giugno 2022. TEMA N. **4**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{5}{6}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1-2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -3.$$

$a)$ $\frac{5\sqrt{3}}{21}$; $b)$ -2; $c)$ -32.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^5}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1-\frac{2}{n}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/4}\cos(\pi n)}{n^3-2}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 e \cdot x \left(e^{-x} - e^{x}\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(\frac{1}{e} + 2xe^{-x^2}\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}\, dx.$$

a) -2, b) 1, c) $\frac{1}{8}\log 3$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 3 + i$?	$-\frac{8}{5} - \frac{i}{5}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3/2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_9 x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_9 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1/2$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1/2$, $a_9 = -1/24$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

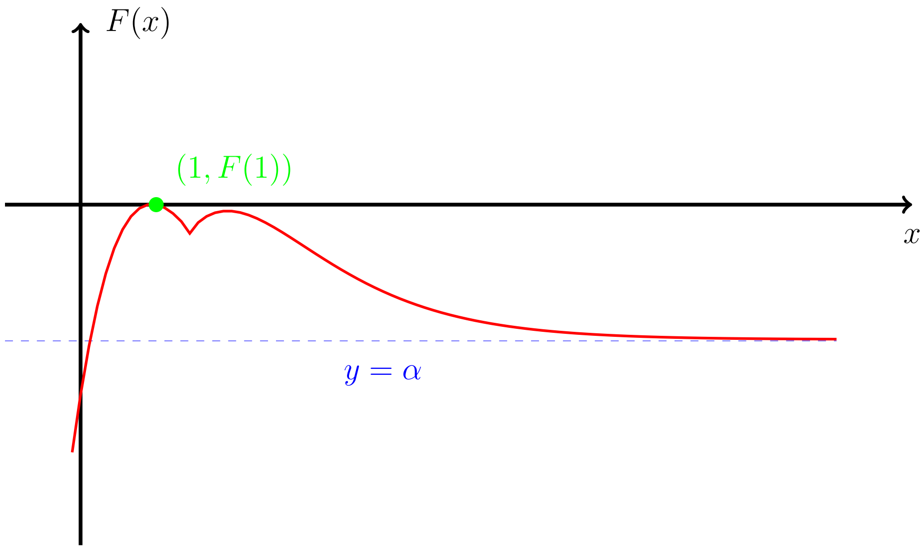
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x=1$, $x=2$ o entrambi. Poiché $F(1)=0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x=1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1 + \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = 1.$$

$a)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{15}$; $b)$ 1; $c)$ 32.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^5}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1-\frac{2}{n}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/4}\cos(\pi n)}{n^3-2}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \left(x^2 e^x - e\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(2x e^{x^2} - e\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x-2}\, dx.$$

a) -2, b) -1, c) $\frac{5}{2} - 4\log 2$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\mathrm{Re}\, z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + i$?	$-2+i$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_6 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_6 = -8/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

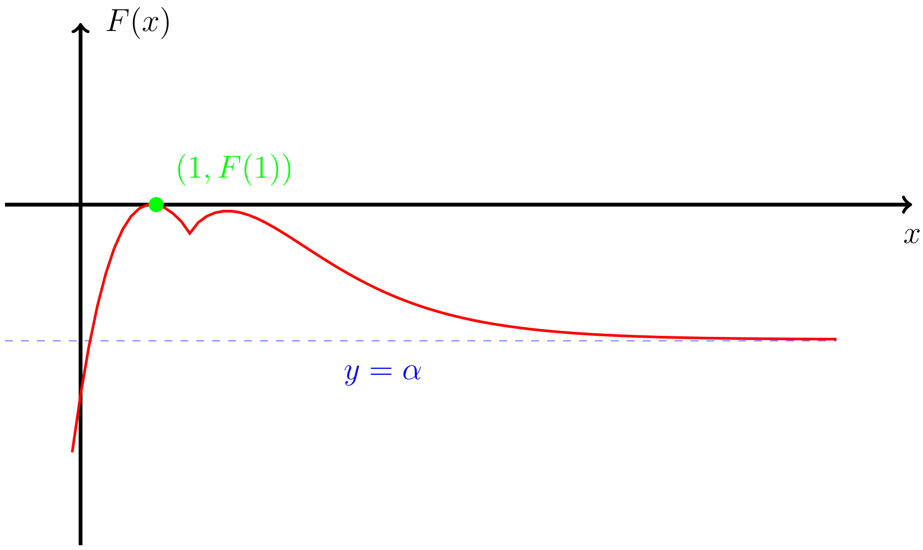
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$
\begin{aligned}
F(2) &= \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Analisi Matematica I. Prova scritta del 27 giugno 2022. TEMA N. **6**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1 + \cos^2\left(\frac{x}{6}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -1.$$

$a)$ $-\frac{\sqrt{3}}{21}$; $b)$ 2; $c)$ 0.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^5}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) converge assolutamente, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 e \cdot x \left(e^x - e^{-x}\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(2xe^{-x^2} + \frac{1}{e}\right) dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\, dx.$$

a) 2, b) 1, c) $4 \log \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 3 + i$?	$-\frac{8}{5} - \frac{i}{5}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3/2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_9 x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_9 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1/2$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1/2$, $a_9 = -1/24$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto *c*) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Per $t \to -\infty$

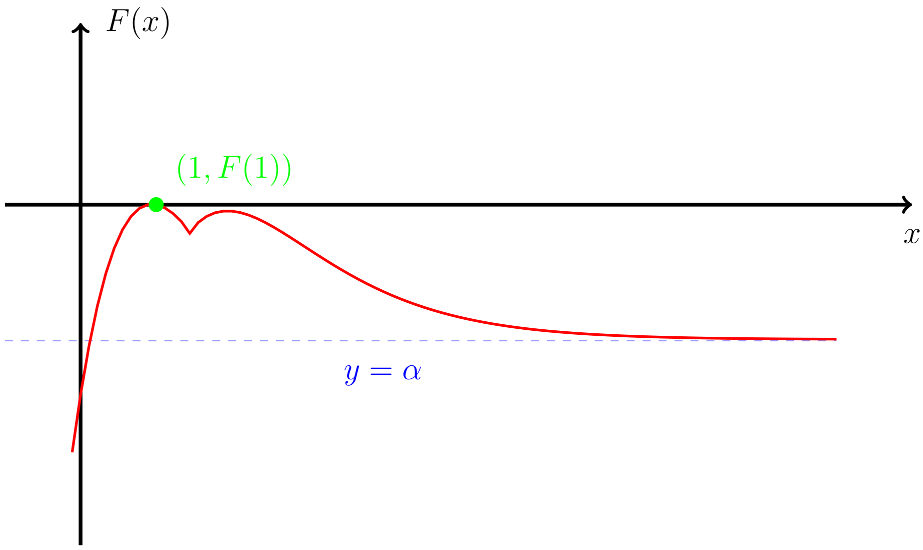
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1 + \cos^2\left(\frac{2}{3}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+3x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -2.$$

a) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$; *b*) 3; *c*) -2.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^4+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 e\cdot x\left(e^{-x}-e^{x}\right)\,dx, \qquad b)\int_0^1\left(\frac{1}{e}+2xe^{-x^2}\right)\,dx, \qquad c)\int_0^1\frac{x^2}{2x+1}\,dx.$$

a) -2, b) 1, c) $\frac{1}{8}\log 3$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + 2i$?	$-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_6 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_6 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^\pm} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

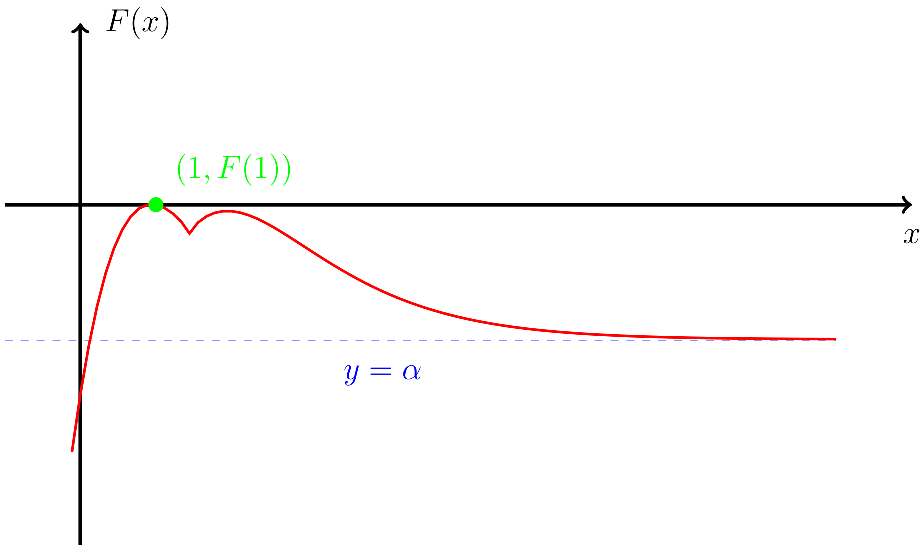
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_1^2 f(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2} + t\right) + f\left(\frac{3}{2} - t\right) \right] \, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + t^2}}{\sqrt[3]{2t} \left(1 + e^{\frac{3}{2}+t}\right) \left(1 + e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}} \left(e^{-t} - e^{t}\right) \, dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{5}{6}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1-2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -3.$$

$a)$ $\frac{5\sqrt{3}}{21}$; $b)$ -2; $c)$ -32.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \left(e - x^2 e^x\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(e - 2xe^{x^2}\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx.$$

a) 2, b) 1, c) $\log 2 - \frac{1}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Re} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 2 + i$?	-2
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_9 x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_9 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_9 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

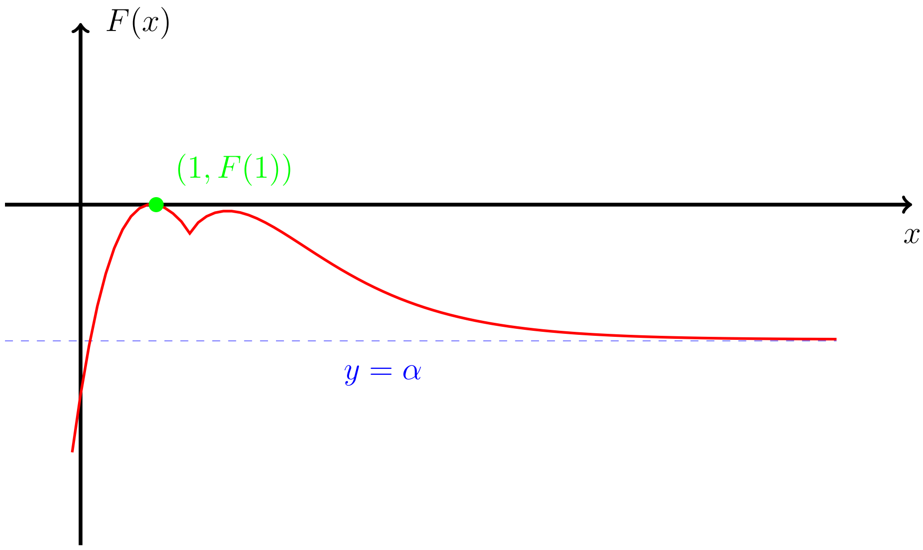
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_1^2 f(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2} + t\right) + f\left(\frac{3}{2} - t\right) \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1 + e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1 + e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}} \left(e^{-t} - e^{t}\right) dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Analisi Matematica I. Prova scritta del 27 giugno 2022. TEMA N. **9**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = 1.$$

$a)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{15}$; $b)$ 1; $c)$ 32.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^5}, \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1-\frac{2}{n}\right)}, \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/4}\cos(\pi n)}{n^3-2}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \left(x^2 e^x - e\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(2xe^{x^2} - e\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x-2}\, dx.$$

a) -2, b) -1, c) $\frac{5}{2} - 4\log 2$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\operatorname{Re} z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + i$?	$-2 + i$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_6 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_6 = -8/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto *c*) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

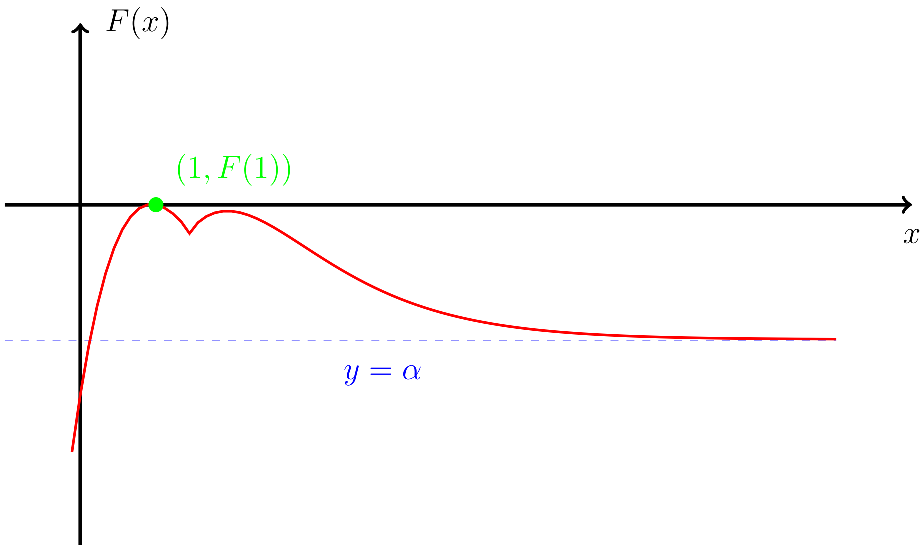
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$
\begin{aligned}
F(2) = \int_1^2 f(t)\,dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2} + t\right) + f\left(\frac{3}{2} - t\right) \right] \,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1 + e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1 + e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}} \left(e^{-t} - e^{t}\right) \,dt < 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Analisi Matematica I. Prova scritta del 27 giugno 2022. TEMA N. **10**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{6}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -1.$$

$a)$ $-\frac{\sqrt{3}}{21}$; $b)$ 2; $c)$ 0.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^5}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) converge assolutamente, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 e\cdot x\left(e^x-e^{-x}\right)\,dx,\qquad b)\int_0^1\left(2xe^{-x^2}+\frac{1}{e}\right)dx,\qquad c)\int_0^1\frac{x^2}{x+2}\,dx.$$

a) 2, b) 1, c) $4\log\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 3 + i$?	$-\frac{8}{5} - \frac{i}{5}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3/2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_9x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \dots\dots\dots$, $a_3 = \dots\dots\dots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \dots\dots\dots$, $a_3 = \dots\dots\dots$, $a_9 = \dots\dots\dots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1/2$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1/2$, $a_9 = -1/24$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

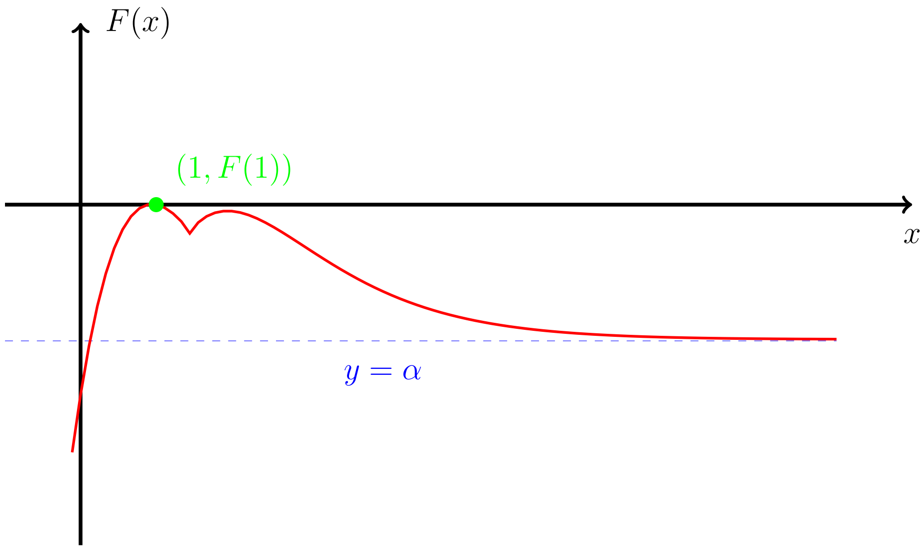
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$
\begin{aligned}
F(2) &= \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{2}{3}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+3x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\,dt, \qquad x_0 = -2.$$

$a)$ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$; $b)$ 3; $c)$ -2.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^4+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 e \cdot x \left(e^{-x} - e^{x}\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(\frac{1}{e} + 2xe^{-x^2}\right) dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}\, dx.$$

a) -2, b) 1, c) $\frac{1}{8}\log 3$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + 2i$?	$-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_6 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_6 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Per $t \to -\infty$

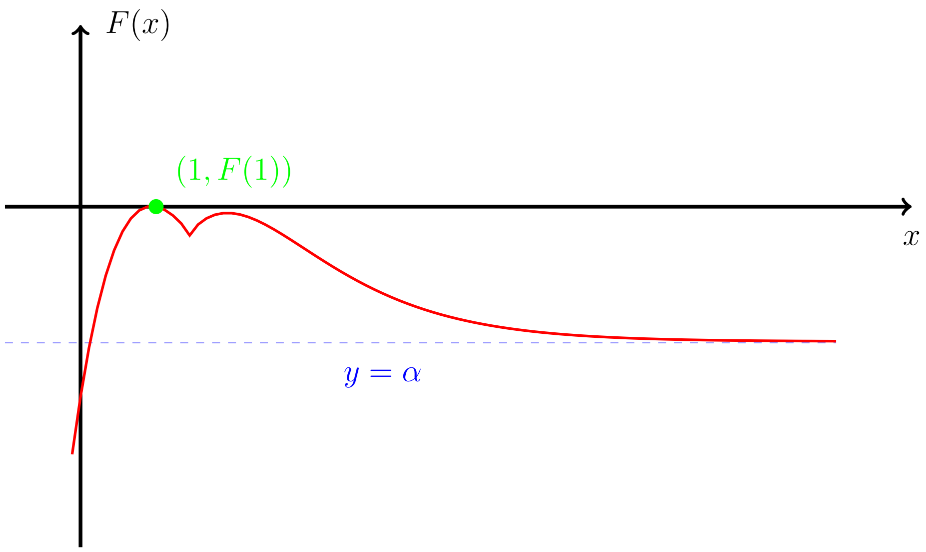
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x=1$, $x=2$ o entrambi. Poiché $F(1)=0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$F(2) = \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0.$$

Quindi $x=1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{5}{6}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1-2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\,dt, \qquad x_0 = -3.$$

$a)$ $\frac{5\sqrt{3}}{21}$; $b)$ -2; $c)$ -32.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \left(e - x^2 e^x\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(e - 2x e^{x^2}\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx.$$

a) 2, b) 1, c) $\log 2 - \frac{1}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Re} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 2 + i$?	-2
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_9 x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_9 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_9 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto *c*) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^\pm} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

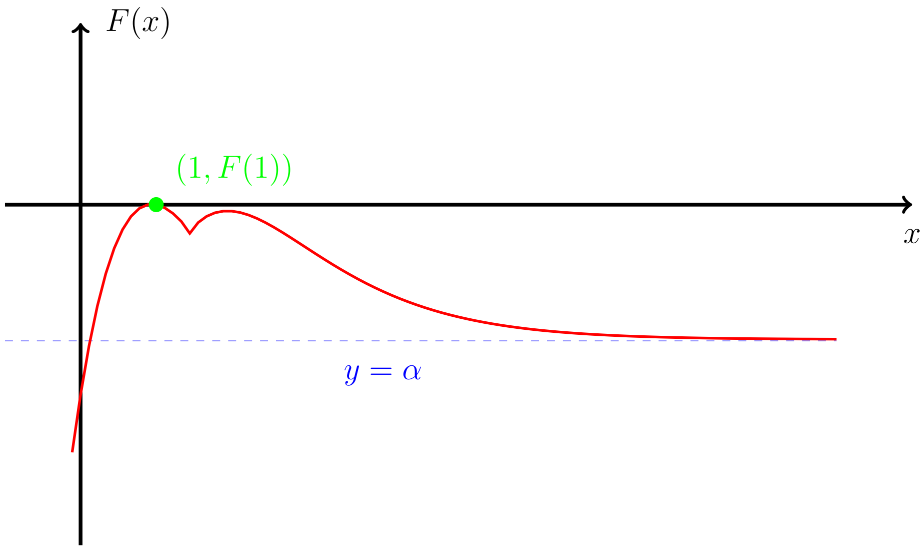
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_1^2 f(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\, dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1 + \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\,dt, \qquad x_0 = 1.$$

$a)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{15}$; $b)$ 1; $c)$ 32.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^5}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1-\frac{2}{n}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/4}\cos(\pi n)}{n^3-2}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 \left(x^2e^x - e\right)\,dx, \qquad b)\int_0^1 \left(2xe^{x^2} - e\right)\,dx, \qquad c)\int_0^1 \frac{x^2}{x-2}\,dx.$$

a) -2, b) -1, c) $\frac{5}{2} - 4\log 2$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\mathrm{Re}\, z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + i$?	$-2+i$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_6 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_6 = -8/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^\pm} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

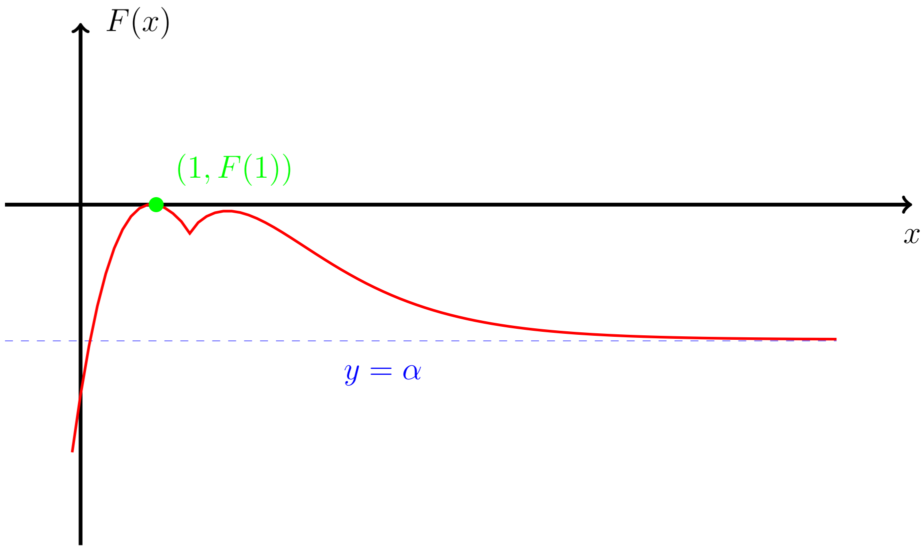
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$
\begin{aligned}
F(2) &= \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2} + t\right) + f\left(\frac{3}{2} - t\right) \right]\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{4} + t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1 + e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1 + e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}} \left(e^{-t} - e^{t}\right)\,dt < 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Analisi Matematica I. Prova scritta del 27 giugno 2022. TEMA N. **14**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{6}\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\,dt, \qquad x_0 = -1.$$

$a)$ $-\frac{\sqrt{3}}{21}$; $b)$ 2; $c)$ 0.

Esercizio 2. Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^5}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) converge assolutamente, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a)\int_0^1 e\cdot x\left(e^x-e^{-x}\right)\,dx,\qquad b)\int_0^1\left(2xe^{-x^2}+\frac{1}{e}\right)dx,\qquad c)\int_0^1\frac{x^2}{x+2}\,dx.$$

a) 2, b) 1, c) $4\log\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 3 + i$?	$-\frac{8}{5} - \frac{i}{5}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3/2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_9x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_9 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1/2$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1/2$, $a_9 = -1/24$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto *c*) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^\pm} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

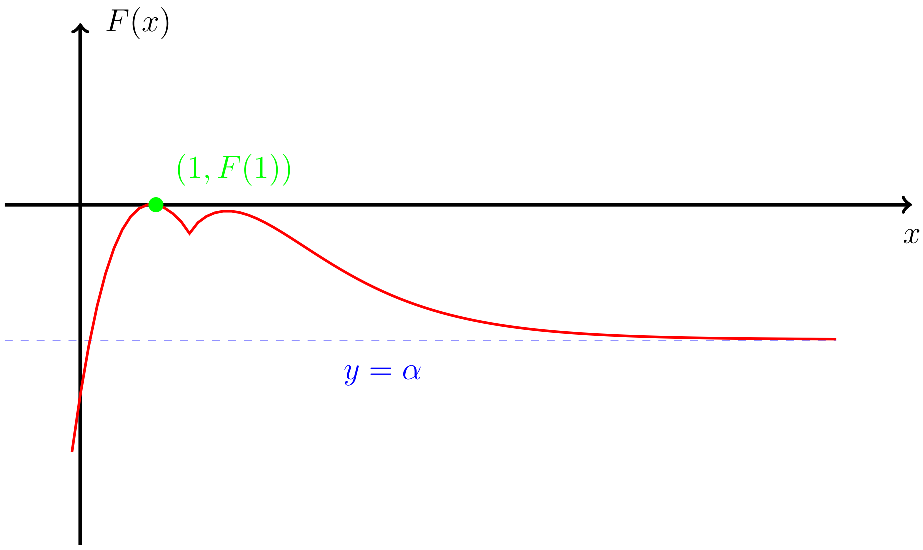
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x\to -\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x=1$, $x=2$ o entrambi. Poiché $F(1)=0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$
\begin{aligned}
F(2) = \int_1^2 f(t)\,dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $x=1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1+\cos^2\left(\frac{2}{3}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1+3x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\,dt, \qquad x_0 = -2.$$

a) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$; *b*) 3; *c*) -2.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^4+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 e \cdot x \left(e^{-x} - e^{x}\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(\frac{1}{e} + 2xe^{-x^2}\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}\, dx.$$

a) -2, b) 1, c) $\frac{1}{8}\log 3$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1+iz}{i+iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\sup\{\operatorname{Im} z : z \in A\}$?	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 1 + 2i$?	$-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + a_6 x^6, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 e a_6 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_1 e a_2 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_1 = \dots\dots\dots$, $a_2 = \dots\dots\dots$,

b) Per quali valori di a_1, a_2 e a_6 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{10}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_1 = \dots\dots\dots$, $a_2 = \dots\dots\dots$, $a_6 = \dots\dots\dots$,

Risposta: (a) $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, (b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_6 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali.
Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2} e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2} e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

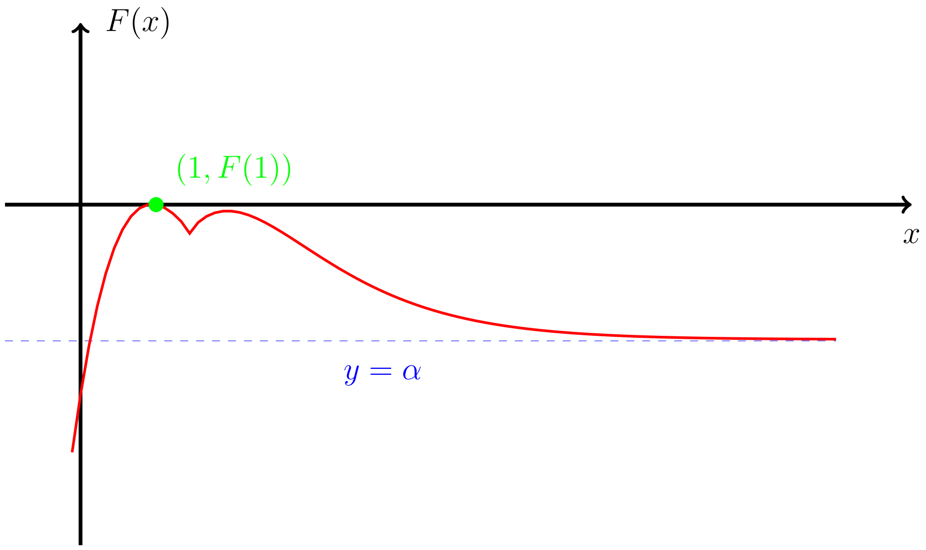
$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2, +\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x = 1$, $x = 2$ o entrambi. Poiché $F(1) = 0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$
\begin{aligned}
F(2) &= \int_1^2 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto di massimo assoluto.



Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$a)\ f(x) = \log\left(1 + \cos^2\left(\frac{5}{6}x\right)\right), \qquad x_0 = \pi;$$

$$b)\ f(x) = \frac{|1-2x|}{(1+x^2)^2}, \qquad x_0 = 0;$$

$$c)\ f(x) = \int_0^{x^2+2x} 2^t\, dt, \qquad x_0 = -3.$$

$a)$ $\frac{5\sqrt{3}}{21}$; $b)$ -2; $c)$ -32.

Esercizio 2. (5 punti) Si discuta la convergenza di due (e non più di due) delle seguenti serie. Se una serie è convergente, si specifichi se la convergenza sia semplice o assoluta.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)^{n^6}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}.$$

a) non converge, *b)* non converge, *c)* converge assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti integrali

$$a) \int_0^1 \left(e - x^2 e^x\right)\, dx, \qquad b) \int_0^1 \left(e - 2xe^{x^2}\right)\, dx, \qquad c) \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx.$$

a) 2, b) 1, c) $\log 2 - \frac{1}{2}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1 + iz}{i + iz}.$$

	Domanda	Risposta
a)	Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = z\}$, quanto vale $\inf\{\operatorname{Re} z : z \in A\}$?	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b)	Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f(z) = 2 + i$?	-2
c)	Qual è l'immagine di f ?	$\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino le due funzioni reali di una variabile reale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{x^3} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s \\ g(x) &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_9 x^9, \end{aligned}$$

dove a_2, a_3 e a_9 sono parametri reali.

a) Per quali valori di a_2 e a_3 risulta che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to 0$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$,

b) Per quali valori di a_2, a_3 e a_9 accade che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^{15}}$ esiste ed appartiene a $(0, +\infty)$?

$a_2 = \ldots\ldots\ldots$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_9 = \ldots\ldots\ldots$,

Risposta: (a) $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$, (b) $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_9 = -1/3$.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

a) Determinare il dominio naturale $E \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 3} - 1}{(1 + e^t)\sqrt[3]{3 - 2t}}, \qquad \forall t \in E.$$

b) Determinare l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ dei valori reali x tali che esista finito (in senso proprio o improprio) l'integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

c) Determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione integrale $F : D \to \mathbb{R}$ definita nel punto precedente.

d) Determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali ed obliqui) e punti di cuspide di F.

e) Quali dei punti trovati nel punto c) sono anche punti di massimo/minimo assoluti?

SOLUZIONE

a) $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$, per cui

$$F'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ = 0 & \text{se } x \in \{1, 2\} \\ > 0 & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right). \end{cases}$$

Quindi $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo e $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo.

d) Poiché la funzione integrale è continua dove è definita, non vi sono asintoti verticali. Poiché $\lim_{x \to \frac{3}{2}^{\pm}} F'(x) = \pm\infty$, $x = \frac{3}{2}$ è un punto di cuspide.

$$f(t) \sim -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}, \qquad t \to +\infty.$$

Poiché la funzione $g(t) = -\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}e^t}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ abbiamo un asintoto orizzontale di equazione

$$y = \alpha \doteq \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Per $t \to -\infty$

$$f(t) \sim \frac{|t|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}} \to +\infty, \qquad t \to -\infty.$$

Non è quindi integrabile e non vi sono asintoti orizzontali per $t \to -\infty$. Poiché $F'(x) = f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ non vi sono nemmeno asintoti obliqui.

e) Per il punto precedente si ha $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ quindi non ci sono punti di minimo assoluto. Poiché in $(2,+\infty)$ F è decrescente, esiste un punto di massimo assoluto che può essere $x=1$, $x=2$ o entrambi. Poiché $F(1)=0$ basta determinare il segno di $F(2)$ per sapere qual è il punto/i di massimo assoluto.

$$\begin{aligned} F(2) = \int_1^2 f(t)\,dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{3}{2}+t\right) + f\left(\frac{3}{2}-t\right)\right]\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sqrt{\frac{3}{4}+t^2}}{\sqrt[3]{2t}\left(1+e^{\frac{3}{2}+t}\right)\left(1+e^{\frac{3}{2}-t}\right)} e^{\frac{3}{2}}\left(e^{-t}-e^{t}\right)\,dt < 0. \end{aligned}$$

Quindi $x=1$ è l'unico punto di massimo assoluto.