Analisi Matematica I. Prova scritta del 18 luglio 2022 . TEMA N. **1**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si studi il carattere di due (e non più di due) delle seguenti serie, stabilendo se convergono, divergono o oscillano:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+2}; \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+1}}; \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(4n)!}.$$

$a)$ convere; $b)$ diverge; $c)$ converge.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali.

$$a)\quad \int_0^1 x \log x \; dx, \qquad b)\quad \int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1}\, dx, \qquad c)\quad \int_0^1 \frac{x^2-2x+1}{x-1}\, dx.$$

a) $-\frac{1}{4}$, *b)* $\frac{1}{2}\log^2 2$, *c)* $-\frac{1}{2}$.

Esercizio 3. (5 punti) Si calcolino due (e non più di due) dei seguenti limiti

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x}, \qquad b) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{\sin^2(x^2)} \qquad c) \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\left(e+\frac{2}{x}\right)^x.$$

a) -1, b) 1, c) $e^{2/e}$

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si considerino le funzioni $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$g(x) = \cos(x - \sin x) - 1, \qquad f(x) = 2 - \sqrt[72]{1 + x^6} - \cos(x - \sin x).$$

a) Qual è l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione g?

b) Qual è l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione f?

c) Detto α l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ di f, quanto vale $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$?

Risposta: *a*) 6; *b*) 8; *c*) $-\frac{1}{720}$.

Esercizio 5. (5 punti) Si considerino i seguenti tre numeri complessi

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = 2i$$

a) Determinare la forma esponenziale del numero complesso $\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}\right)^{-5}$:

b) Determinare

$$\min \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Im}\left[\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}\right)^{-n}\right] = 0 \right\}:$$

c) Determinare

$$\min \left\{ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re}\left[\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}\right)^{-n}\right] = 0 \right\}:$$

Risposta: a) $\frac{\sqrt{2}}{8} e^{\frac{1}{12}\pi i}$, b) 12, c) 6.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti) Ricordiamo che z è un punto fisso per una funzione f se $f(z) = z$.

a) Se f è una funzione reale, derivabile in un intervallo I e tale che $f'(x) \neq 1$ per ogni $x \in I$, si dimostri che f possiede al più un solo punto fisso appartenente ad I.

b) Costruire una funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ che possieda due punti fissi appartenenti a $[0,1]$.

c) Se $f\colon [0,1] \to [0,1]$ è una funzione continua, si dimostri l'esistenza di almeno un punto fisso per f in $[0,1]$.

d) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà: esiste $L \in (0,1)$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ per ogni x, $y \in \mathbb{R}$. Si dimostri che f possiede al più un solo punto fisso.

e) Si dimostri che la funzione $f\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definita da $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ non possiede punti fissi e soddisfa la condizione $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ per ogni $x \neq y$.

SOLUZIONE

a) Se f possedesse due punti fissi x_1 e x_2, allora, per il teorema di Rolle, esisterebbe un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che la derivata della funzione $x \mapsto f(x) - x$ si annullerebbe in c. Questo contraddice l'ipotesi su f;

b) Ad esempio $f(x) = x^2$.

c) Basta considerare la funzione $g(x) = f(x) - x$. Se $f(0) = 0$ oppure se $f(1) = 1$, la dimostrazione è finita. Altrimenti $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Dunque $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$, e per il Teorema dei Valori Intermedi deduciamo l'esistenza di uno zero z di g in $[0,1]$. Pertanto $g(z) = 0$, e z è un punto fisso di f.

d) Supponiamo che $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$, con $x_1 \neq x_2$. Dunque

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|,$$

sicché $0 \leq (1-L)|x_1 - x_2| \leq 0$, una contraddizione.

e) Per $x > y$, si ha

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \left| x - y + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \left| (x-y) - \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \right| = |x-y| \left| 1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &< |x-y|\,.\end{aligned}$$

Scambiando x con y si ottiene che $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ per ogni $x \neq y$. Basta osservare che $f(x) = x$, cioè $x + \frac{1}{1+x} = x$, implica $\frac{1}{1+x} = 0$ che non ha soluzione.