Analisi Matematica I. Prova scritta del 26 settembre 2022 . TEMA N. **1**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).
È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si trovi la forma algebrica di due (e non più di due) dei seguenti numeri complessi.

$$a)\quad z = \frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}; \qquad b)\quad z = 2e^{\frac{\pi}{6}i} - \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}; \qquad c)\quad z \text{ tale che } z^3 = i \text{ e } Im(z) < 0.$$

$a)$ $\frac{1}{2}i$; $b)$ $\sqrt{3}-1+2i$; $c)$ $-i$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali.

$$a)\quad \int_0^1 \frac{e^x}{2+e^{-x}}dx, \qquad b)\quad \int_1^e \frac{\cos(2\log x)}{x}dx, \qquad c)\quad \int_0^1 \frac{-3-2x-2x^2+x^3}{x-3}\,dx.$$

a) $\frac{1}{4}(-2+2e+\log(3)-\log(1+2e))$, *b)* $\sin(1)\cos(1)$, *c)* $\frac{11}{6}$.

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino $I = \inf_A f$ e $S = \sup_A f$ in due (e non più di due) dei seguenti casi

$$\begin{aligned} &a) \quad f(x) = \Big|1 - |x-2|\Big|, \quad A = [1,5], \\ &b) \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2, \quad A = [-4,2], \\ &c) \quad f(x) = x \log x, \quad A = (0,2]. \end{aligned}$$

a) $I = 0$, $S = 2$, b) $I = -34$, $S = 18$, c) $I = -\frac{1}{e}$, $S = 2\log 2$.

Parte B **Si richiede di riportare le risposte alle domande; non si richiede la giustificazione**

Esercizio 4. (5 punti) Si considerino le funzioni definite da

$$f_m(x) = \frac{\log(1+x^m)}{x\sin(2x)}\left(\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}-1\right), \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad x \in (0,1)\,,$$

$$g_a(x) = \frac{(1-\cos x)\sin(2x) - ax^3}{x^2 \sin(3x)}, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad x \in (0,1)\,.$$

a) Quanto vale il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f_2(x)}{g_1(x)}$?

b) Per quali valori di $m \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ si ha $f_m \sim g_a$ per $x \to 0$?

c) Per quali valori di $m \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ si ha $f_m = o(g_a)$ per $x \to 0$?

Risposta: *a)* $-\frac{4}{3}$; *b)* $m = 0,\ a = 1 - \log 2$; *c)* $(a = 1,\ m \geq 3)$ o $(a \neq 1,\ m \geq 1)$.

Esercizio 5. (5 punti) Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie numerica

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(x^2+1)^n},$$

e sia E l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per cui tale serie converge.

a) Descrivere esplicitamente l'insieme E:

b) Determinare, se esiste, il

$$\min\{S(x) \mid x \in E\} :$$

c) Determinare, se esiste, il

$$\max\{S(x) \mid x \in E\} :$$

Risposta: a) $E = \mathbb{R}$, b) 2/3, c) 2.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$F_\alpha\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad F_\alpha(x) = \int_1^x t^\alpha \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

a) Per quali valori di α il limite $\lim_{x\to+\infty} F_\alpha(x)$ esiste finito?

b) Per quali valori di α il limite $\lim_{x\to 0^+} F_\alpha(x)$ esiste finito?

c) Per quali valori di α la funzione F_α è lipschitziana?

d) Si dimostri che, se $\alpha \in (-1,1]$, F_α è uniformemente continua.

e) Si discuta, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_{n=1}^\infty \big(F_\alpha(2n) - F_\alpha(n)\big)$.

SOLUZIONE

a) Osserviamo che $f_\alpha(t) := t^\alpha \arctan\left(\frac{1}{t}\right) > 0$ per ogni $t \in (0,+\infty)$. Inoltre $f_\alpha(t) \sim t^{\alpha-1}$ per $t \to +\infty$. Per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri possiamo concludere che $\lim_{x\to+\infty} F_\alpha(x)$ esiste finito (cioè l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} t^\alpha \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge) se e solo se $\alpha < 0$.

b) Osserviamo che $f_\alpha(t) \sim \frac{\pi}{2} t^\alpha$ per $t \to 0^+$. Per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri possiamo concludere che $\lim_{x\to 0^+} F_\alpha(x)$ esiste finito (cioè l'integrale improprio $\int_0^1 t^\alpha \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge) se e solo se $\alpha > -1$.

c) Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, essendo f_α continua in $(0,+\infty)$, si ha che F_α è derivabile in $(0,+\infty)$ e $F_\alpha' = f_\alpha$. Quindi F_α è lipschitziana se e solo f_α è limitata in $(0,+\infty)$, cioè se e solo se $\alpha \in [0,1]$.

d) Se $\alpha \in [0,1]$, per il punto precedente F_α è lipschitziana e quindi uniformemente continua. Rimane da dimostrare che F_α è uniformemente continua per $\alpha \in (-1,0)$.
Se $\alpha \in (-1,0)$, per quanto stabilito nei punti a) e b), si ha che esistono finiti $\ell_0 = \lim_{x\to0^+} F_\alpha(x)$ e $\ell_\infty = \lim_{x\to+\infty} F_\alpha(x)$. Se, per assurdo, F_α non fosse uniformemente continua, esisterebbero $\varepsilon > 0$ e due successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subset (0,+\infty)$ tali che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|F_\alpha(x_n) - F_\alpha(y_n)| \geq \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione che ammette limite $L \geq 0$ (finito o $+\infty$); quindi $\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = L$. Essendo F_α continua, si avrebbe allora che $\lim_{k\to+\infty} F_\alpha(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} F_\alpha(y_{n_k}) = F(L)$ se $L \in (0,+\infty)$ e che, per il Teorema Ponte, $\lim_{k\to+\infty} F_\alpha(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} F_\alpha(y_{n_k}) = \ell_\infty$ se $L = +\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} F_\alpha(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} F_\alpha(y_{n_k}) = \ell_0$ se $L = 0$. In ogni caso potremmo concludere che $\lim_{k\to+\infty} |F_\alpha(x_{n_k}) - F_\alpha(y_{n_k})| = 0$, contraddicendo il fatto che $|F_\alpha(x_n) - F_\alpha(y_n)| \geq \varepsilon$.

e) Osserviamo che la serie data è a termini positivi. Con la sostituzione $t = \frac{1}{s}$ otteniamo che

$$F_\alpha(x) = \int_1^x t^\alpha \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 s^{-\alpha-2} \arctan s \, ds$$

cosicché

$$F_\alpha(2n) - F_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} s^{-\alpha-2} \arctan s \, ds.$$

Dalla formula di Taylor segue che $s^{-\alpha-2} \arctan s = s^{-\alpha-1} + o(s^{-\alpha-1})$ per $s \to 0$, e quindi

$$F_\alpha(2n) - F_\alpha(n) = \begin{cases} \frac{2^\alpha - 1}{\alpha} n^\alpha + o(n^\alpha) & \text{se } \alpha \neq 0, \\ \log 2 + o(1) & \text{se } \alpha = 0, \end{cases} \quad \text{per } n \to \infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo allora che la serie converge per $\alpha < -1$ e diverge a $+\infty$ per $\alpha \geq -1$.