Analisi Matematica I. Prova scritta del **30 gennaio 2023**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si trovi la forma algebrica di due (e non più di due) dei seguenti numeri complessi.

$$a) \quad z = \frac{(1+2i)^3 - (1+i)^4}{1+3i}; \qquad b) \quad z = i - \sqrt{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{15}; \qquad c) \quad z \text{ tale che } \begin{cases} z^2 + (1-2i)z - 2i = 0 \\ \mathrm{Im}(z) > 0. \end{cases}$$

$a)$ $-\frac{13}{10} + i\frac{19}{10}$; $b)$ -1; $c)$ $2i$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il carattere di due (e non più di due) tra le seguenti serie

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}, \qquad\qquad b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad\qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}.$$

$a)$ converge; $b)$ converge; $c)$ diverge.

Esercizio 3. (5 punti) Si determini l'equazione della retta tangente al grafico, nel punto $(1, f(1))$, di due (e non più di due) delle seguenti tre funzioni.

$$a) \quad f(x) = \Big| |x-2| - 2 \Big|, \qquad b) \quad f(x) = x^7 - 4x^3 + 5x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \qquad c) \quad f(x) = x^x.$$

$a) \quad y = x, \qquad b) \quad y = 5x - 2, \qquad y = x.$

Parte B **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 4. (5 punti) Si determinino $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\left(\sqrt{1-x+x^2} - \cos\sqrt{x}\right)^{\alpha} \sim \beta\left(\left(\cos x - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan x + \frac{3}{2}x^3\right) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Risposta: $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = -\frac{24}{11}\,3^{-5/2}$.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{\frac{|x+1|}{x}} = x \cdot \exp\left(\frac{|x+1|}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme dei punti $E \subseteq \mathbb{R}$ in cui è continua.

b) Determinare l'insieme dei punti $F \subseteq \mathbb{R}$ in cui è derivabile e calcolarne la derivata.

c) Determinare l'equazione degli (eventuali) asintoti verticali/orizzontali/obliqui al suo grafico.

SOLUZIONE

a) In $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è continua essendo composizione di funzioni continue. Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, non è continua in $x = 0$, perciò $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) È sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ in quanto in tale insieme è composizione di funzioni derivabili (la funzione $x \mapsto |x + 1|$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$). La sua derivata è data da

$$f'(x) = e^{\frac{|x+1|}{x}} \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sgn}(x+1)}{x}\right].$$

In $x = 0$ non è derivabile non essendo in tale punto continua. Nel punto $x = -1$ i limiti destri e sinistri della derivata sono

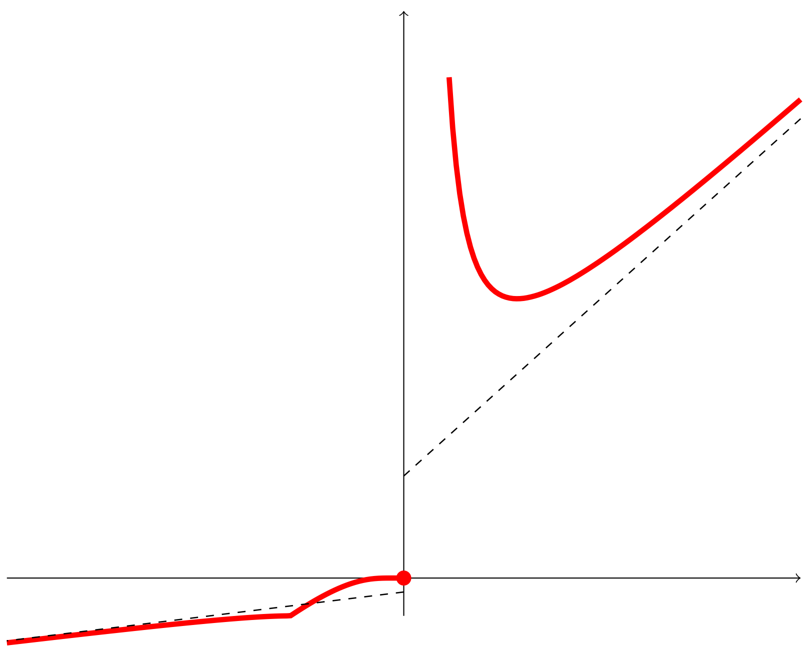
$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = 0 = f'_-(-1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = 2 = f'_+(-1).$$

Quindi f non è derivabile in $x = -1$ che risulta essere un punto angoloso e $F = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

c) Dal punto a) si ha che $x = 0$ è un asintoto verticale.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{|x+1|}{x}} = e^{\pm 1},$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - e^{\pm 1} \cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot e^{\pm 1} \left[e^{\frac{|x+1|}{x} \mp 1} - 1\right] = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\pm 1} \left[|x+1| \mp x\right] = \pm e^{\pm 1}.$$

Quindi $y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$ e $y = ex + e$ sono asintoti obliqui rispettivamente per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.



Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, consideriamo l'integrale indefinito

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}.$$

a) Si ricavi la seguente formula ricorsiva: $I_n = \dfrac{x}{2(n-1)\,(x^2+1)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$.

b) Si determini il valore di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^3}$.

c) Si dimostri che, per ogni $b > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ risulti $\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} \geq \frac{1}{2} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}$.

Risposta: a) Per parti o per induzione su n, b) $\frac{3}{8}\pi$, c) Basta applicare a) ed osservare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-3}{2n-2} = 1$.