Analisi Matematica I. Prova scritta del **20 febbraio 2023**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Di due (e non più di due) delle seguenti funzioni si calcoli il valore $f'(x_0)$:

$$\text{a)}\quad f(x) = \log\left(1 + x^x\right), \ x_0 = 1; \qquad \text{b)}\quad f(x) = \arctan\left(\sin\left(x^2 - 2\right)\right), \ x_0 = 2;$$

$$\text{c)}\quad f(x) = \frac{x^5}{x^2 - \mathrm{e}^{-x}}, \ x_0 = 0.$$

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{4\cos 2}{1+\sin^2 2}$; *c)* 0.

Esercizio 2. (5 punti) Si calcoli il valore di due e non più di due dei seguenti integrali (propri o impropri):

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int_0^1 \left(\mathrm{e} - x^2 \mathrm{e}^x\right)\, dx, \qquad \text{c)} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{x^2}\, dx.$$

a) $2\,(\mathrm{e}-1)\,,$ *b*) 2 *c*) $1.$

Esercizio 3. (5 punti) Si determini il carattere di due (e non più di due) tra le seguenti serie:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n+4}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-6}{n^5-n^2+7}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan n}{5^n}.$$

a) diverge; *b*) converge; *c*) converge.

Parte B

Esercizio 4. (5 punti)

a) Si determinino tutte le soluzioni $w \in \mathbb{C}$ dell'equazione $w^3 = \dfrac{1+i}{1-i}$;

b) si determini il numero reale α definito da

$$\alpha = \sup\left\{ |z| \quad \middle| \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i}{1-i} \right\}.$$

Risposta: a) $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i,\ w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i,\ w_2 = -i$, b) $\alpha = 2+\sqrt{3}$.

Esercizio 5. (5 punti) Per ogni $s \geq 0$ e $t \geq 0$ denotiamo con $L(s,t)$ il valore — eventualmente infinito — del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(1-(1-x^3)^{3/4}\right)^{2s}}{\left(\frac{2}{2-\sin x} - \cos(x^2) - \frac{x}{2}\right)^{t+1}}$$

a) Determinare l'insieme dei punti $E = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ L(s,t) \text{ esiste finito } \}$.

b) Si determini il valore — eventualmente infinito — di $L(s,s)$ al variare di $s \geq 0$.

SOLUZIONE

a) Utilizzando gli sviluppi di Taylor si trova che il numeratore ha lo sviluppo $\frac{3}{4}x^3 + O(x^5)$, , mentre il denominatore ha lo sviluppo $\frac{x^2}{4} + O(x^3)$. Pertanto il limite si riduce al

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\frac{3}{4}x^3\right)^{2s}}{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^{t+1}},$$

e dunque

$$E = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geq 0,\ t \geq 0,\ 3s \geq t+1\right\}.$$

b) Per $t = s$, il punto a) mostra che $L(s,s) = 0$ per $s > 1/2$, $L(s,s) = +\infty$ per $s < 1/2$, e $L(1/2,1/2) = 6$.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Si dimostri che f è pari.

b) Si dimostri che f è derivabile in $\mathbb{R}$.

c) Si stabilisca se $f \in C^1(\mathbb{R})$.

d) Si stabilisca se f è lipschitziana.

e) Si discuta, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la risolubilità dell'equazione $f(x) = \alpha$.

Risposta: a) Usando la formula di integrazione per sostituzione si ottiene che, per ogni $x \neq 0$,

$$f(-x) = -\frac{1}{x}\int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt \underset{s=-t}{=} \frac{1}{x}\int_0^x e^{-s^2}\,ds = f(x),$$

quindi f è pari.
b) Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, la funzione $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi f è derivabile in ogni $x \neq 0$ in quanto rapporto di funzioni derivabili. Osserviamo che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt - 1}{x} = \frac{\int_0^x (e^{-t^2} - 1)\,dt}{x^2},$$

quindi, per il Teorema di l'Hôpital, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{-t^2} - 1)\,dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}(-x) = 0.$$

Concludiamo che f è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$.
c) Per il Teorema Fondamentale del Calcolo e le note regole di derivazione abbiamo che, per ogni $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{x}e^{-x^2} = -\frac{1}{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{x}(e^{-x^2} - 1) + \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x^2}\int_0^x (e^{-t^2} - 1)\,dt + \frac{e^{-x^2} - 1}{x}. \end{aligned}$$

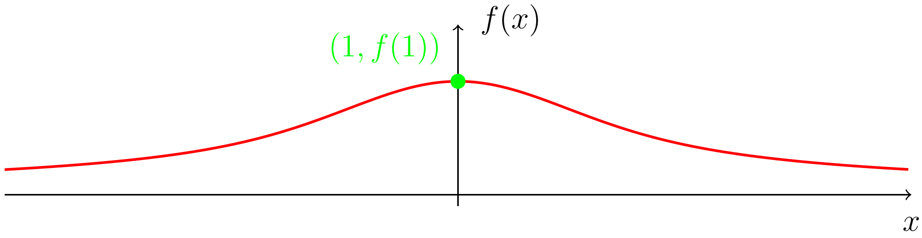
Quindi f' è continua in ogni $x \neq 0$. Inoltre, dato che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x (e^{-t^2} - 1)\,dt = 0$ e $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{x} = 0$ per quanto visto nel punto b), concludiamo che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ e f' è continua in 0. Abbiamo così dimostrato che $f \in C^1(\mathbb{R})$.
d) Per il punto precedente sappiamo che f' è continua in $\mathbb{R}$. Inoltre, dato che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge (come si vede facilmente per confronto), si ha che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{x}e^{-x^2}\right) = 0.$$

Segue che f' è limitata in $\mathbb{R}$. Infatti, da $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ segue che esiste $R > 0$ tale che $|f'(x)| < 1$ se $|x| > R$; inoltre f' è limitata su $[-R, R]$ per il Teorema di Weierstrass. Essendo f derivabile con f' limitata, concludiamo che f è lipschitziana in $\mathbb{R}$.
e) Osserviamo che, per ogni $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x (e^{-x^2} - e^{-t^2})\,dt.$$

Se $x > 0$ e $t \in (0, x)$, essendo $t \mapsto e^{-t^2}$ decrescente in $[0, x]$, si ha che $e^{-x^2} - e^{-t^2} < 0$. Quindi $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Segue che f è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$, Inoltre, essendo f pari, f è strettamente crescente in $(-\infty, 0]$. Si deduce così che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 0$. Dalla convergenza dell'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ segue che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Un grafico qualitativo della f risulta allora come in figura:



Dall'analisi del grafico, concludiamo che l'equazione $f(x) = \alpha$ non ha soluzioni se $\alpha > 1$ o $\alpha \leq 0$, ha esattamente due soluzioni per $\alpha \in (0, 1)$ e ha esattamente una soluzione (data da $x = 0$) per $\alpha = 1$.