Analisi Matematica I. Prova scritta del **26 giugno 2023**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si determinino due (e non più di due) dei seguenti sviluppi di Taylor:

a) sviluppo di Taylor di centro 0 e ordine 9 con resto di Peano della funzione $f(x) = \sin(x^3) + 1 - e^{x^3}$;

b) sviluppo di Taylor di centro $\frac{\pi}{2}$ e ordine 2 con resto di Peano della funzione $g(x) = 1 + x + x^2 + \sin x$;

c) sviluppo di Taylor di centro 1 e ordine 4 con resto di Peano della funzione $h(x) = \sinh x$.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^9 + o(x^9)$ per $x \to 0$; *b)* $g(x) = 2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + (\pi + 1)(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + o((x - \frac{\pi}{2})^2)$ per $x \to \frac{\pi}{2}$; *c)* $h(x) = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{e^2+1}{2e}(x-1) + \frac{e^2-1}{4e}(x-1)^2 + \frac{e^2+1}{12e}(x-1)^3 + \frac{e^2-1}{48e}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$ per $x \to 1$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali:

$$\text{a)} \int_0^4 \left(3x^2 + 2x\sqrt{x} - 1\right) dx; \qquad \text{b)} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{|x|} \cdot \sin x + x^2\right) dx; \qquad \text{c)} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 4}\, dx.$$

a) $\frac{428}{5}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $-\frac{1}{2}\log 3$.

Esercizio 3. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) tra i seguenti limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right), \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \sin\left(\mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{\log(1 + x^3)}.$$

a) 0, b) 1 c) $-1/3$.

Parte B **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri la funzione $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

a) Si stabilisca se f è lipschitziana.

b) Si determini il valore $\sup_{\mathbb{R}} f$.

c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si stabilisca quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \alpha$.

Risposta: a) f è lipschitziana; b) $e^{1/e}$; c) nessuna soluzione per $\alpha \leq 0$ o $\alpha > e^{1/e}$, una soluzione per $0 < \alpha \leq 1$ o $\alpha = e^{1/e}$, due soluzioni per $1 < \alpha < e^{1/e}$.

Esercizio 5. (5 punti) Sia $A \subset \mathbb{C}$ il seguente insieme di numeri complessi:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z^2| = 2 \text{ e } \operatorname{Im}(z^3) = 2 \right\},$$

dove $\operatorname{Im}(w)$ è la parte immaginaria del numero complesso w.

a) Determinare l'estremo superiore dell'insieme $B = \{|z| \mid z \in A\}$;

b) Determinare quanti punti contiene l'insieme A;

c) Determinare l'estremo superiore dell'insieme $C = \{\operatorname{Im}(z) \mid z \in A\}$.

a) $\sqrt{2}$; b) 6 c) 1.

Parte C **Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.**

Esercizio 6. (8 punti)

i) Per quali valori del parametro reale α la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{(n^2+2n)^\alpha}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^\alpha - 1\right) \tag{1}$$

è convergente?

ii) Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali. Si dimostri che per ogni numero intero $m \geq 2$, sussiste la seguente identità:

$$\sum_{n=1}^{m} (a_n - a_{n+2}) = a_1 + a_2 - (a_{m+1} + a_{m+2}).$$

iii) Per tutti i valori di α tali che la serie (1) sia convergente, si determini il valore della somma di tale serie.

Risposta: i) Per $n \to +\infty$ risulta

$$\frac{n^\alpha}{(n^2+2n)^\alpha}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^\alpha - 1\right) \sim \frac{2\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

La serie è convergente se e solo se $\alpha + 1 > 1$ oppure $\alpha = 0$, cioè se e solo se $\alpha \geq 0$.
ii) L'identità è banalmente vera per $m = 2$. Se (1) è vera per un certo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, allora

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m+1} (a_n - a_{n+2}) &= \sum_{n=1}^{m} (a_n - a_{n+2}) + (a_{m+1} - a_{m+3})\\ &= a_1 + a_2 - (a_{m+1} + a_{m+2}) + (a_{m+1} - a_{m+3})\\ &= a_1 + a_2 - (a_{m+2} + a_{m+3}).\end{aligned}$$

La validità di (1) segue per induzione.
iii) Per $\alpha = 0$ la somma è banalmente zero. Per $\alpha > 0$ osserviamo che:

$$\begin{aligned}\frac{n^\alpha}{(n^2+2n)^\alpha}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^\alpha - 1\right) &= \frac{(n+2)^\alpha - n^\alpha}{(n(n+2))^\alpha}\\ &= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha}.\end{aligned}$$

La serie è del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+2})$, scegliendo $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Per $\alpha > 0$ risulta $a_n \to 0$, e dall'identità dimostrata in ii) abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha}\right) = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{2^\alpha}.$$