Analisi Matematica I. Prova scritta del **24 luglio 2023**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Parte A **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 1. (5 punti) Si determini la derivata della funzione f nel punto x_0 in due (e non più di due) dei seguenti casi:

$$\text{a)}\quad f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x, \qquad x_0 = 1;$$

$$\text{b)}\quad f(x) = \frac{\arcsin x}{\cosh x}, \qquad x_0 = 0;$$

$$\text{c)}\quad f(x) = \arctan\left(\frac{x^4-4}{x^4+4}\right), \qquad x_0 = \sqrt{2}.$$

a) $-\frac{\log 2}{2}$; *b)* 1; *c)* $\sqrt{2}$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali:

$$\text{a)}\ \int_{-10}^{10} x^3 \sin\left(x^4\right)\, dx; \qquad \text{b)}\ \int_0^{\pi/4} \left(1+\tan^2 x\right)\cdot 2^{\tan x}\, dx; \qquad \text{c)}\ \int_1^e \log_3 x\, dx.$$

a) 0; b) $\frac{1}{\log 2}$; c) $\frac{1}{\log 3}$.

Esercizio 3. (5 punti) Si risolvano in campo complesso due (e non più di due) delle seguenti equazioni:

$$a)\ z^3 = 1; \qquad b)\ z^2 - 2z + 20 = 0; \qquad c)\ z\,(1+i) = e^{\frac{\pi}{2}i} + (3i-2)^2.$$

a) $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $1 \pm \sqrt{19}\, i$; c) $-8-3i$.

Parte B **Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.**

Esercizio 4. (5 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{n+2}\left[\dfrac{n^2+1}{n+1}\right], & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1 + (n-2)e^{-n}, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

dove $[x]$ denota la parte intera di $x \in \mathbb{R}$. Sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Si determinino $\sup A$ e $\inf A$. Esistono $\max A$, $\min A$?

b) Si determinino $\limsup_{n\to\infty} a_n$ e $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Risposta: a) $\sup A = \max A = 1 + e^{-3}$, $\inf A = -1$, $\min A$ non esiste; b) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

Esercizio 5. (5 punti) Siano a_0, a_1 e a_2 tre numeri reali. Sono definite le funzioni reali di una variabile reale

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad g(x) = \tan x.$$

a) Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0^+$, quanto valgono a_0 e a_1?

b) Per quali valori di a_0, a_1 e a_2 risulta $f'(x) \sim g(x)$ per $x \to 0^+$?;

c) Esistono valori di a_0, a_1 e a_2 tali che $f(x) \sim g'(x)$ per $x \to 0^+$?

a) $a_0 = a_1 = 0$; b) a_0 qualunque, $a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$ c) $a_0 = 1$, a_1 e a_2 qualunque.

Parte C Si richiede di motivare *adeguatamente* le risposte; la sole risposte esatte non verranno valutate.

Esercizio 6. (8 punti)

i) Si determini l'insieme $E \subset \mathbb{R}$ di tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste, eventualmente in senso improprio, il seguente integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{\log(t) + t^2 - 1}{1 + \log(1+t) + t^2}\, dt, \qquad x \in E \subset \mathbb{R},$$

e sia $F : E \to \mathbb{R}$ la funzione integrale così definita.

ii) Determinare l'insieme $\bar{E}$ in cui F è derivabile e gli intervalli in cui è crescente e decrescente individuando eventuali punti di massimo/minimo relativi/assoluti.

iii) Stabilire se la funzione integrale F è Lipschitziana.

iv) Stabilire se F è uniformemente continua [Suggerimento: distinguere i due insiemi $E_1 = \{x \in E \mid x \le 1\}$ e $E_2 = \{x \in E \mid x \ge 1\}$].

Risposta:

i) La funzione integranda $f(t) = \frac{\log(t)+t^2-1}{1+\log(1+t)+t^2}$ è definita e continua in $t \in (0, +\infty)$. Poiché $f(t) \overset{t\to 0^+}{\sim} \log(t)$ e la funzione $\log(t)$ è integrabile in senso improprio in un intorno destro di zero si ha che $E = [0, +\infty)$.

ii) La funzione integranda f è continua in $(0, +\infty)$, quindi la funzione integrale F è derivabile in tale insieme con $F'(x) = f(x) = \frac{\log(x)+x^2-1}{1+\log(1+x)+x^2}$. Poiché $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, la funzione integrale non è derivabile in $x = 0$ pur essendo in tale punto continua. Perciò $\bar{E} = (0, +\infty)$. Infine, poiché $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, $x = 1$ è un punto di minimo assoluto con $F(1) = 0$ mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Infatti, F non può avere massimi assoluti in quanto $f(t) \sim 1$ per $t \to +\infty$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

iii) Poiché $F'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$, F non può essere Lispchitziana in E in quanto ha derivata illimitata.

iv) In $[1, +\infty)$, F' è limitata e quindi, su tale insieme, F è Lipschitziana e di conseguenza uniformemente continua. In $[0, 1]$ F è continua su un intervallo chiuso e limitato e quindi è uniformemente continua su tale insieme. Di conseguenza F è uniformemente continua su tutto il suo dominio di definizione E.