Analisi Matematica I. Prova scritta del **21 settembre 2023**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(1, f(1))$ di due (e non più di due) tra le seguenti funzioni:

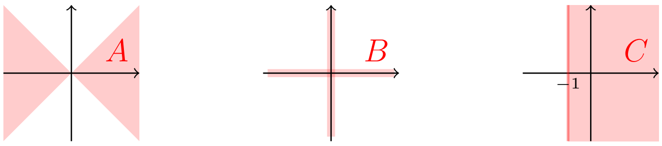
$$\text{a) } f(x) = 2x^3 \cos(\pi x) - \frac{\sin(2\pi x)}{x^2}; \quad \text{b) } f(x) = e^{2x} \cdot \log\left(\frac{1+x^2}{2}\right); \quad \text{c) } f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x^2}.$$

Risposte: *a)* $y = -2 - (6 + 2\pi)(x - 1)$; *b)* $y = e^2 \cdot (x - 1)$; *c)* $y = \frac{4}{3}(x - 1)$.

Esercizio 2. (5 punti) Si disegnino sul piano complesso due (e non più di due) dei seguenti insiemi:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) > 0 \right\}; \qquad B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^3 \bar{z}) = 0 \right\}; \qquad C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z}{z+2} \right| \leq 1 \right\}.$$

Risposte:



Esercizio 3. (5 punti) Si calcoli il valore di due e non più di due dei seguenti integrali (propri o impropri):

$$\text{a)} \quad \int_0^{\pi} 4x^3 \cos\left(x^4 + 2\right)\, dx, \qquad \text{b)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx, \qquad \text{c)} \quad \int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, dx.$$

Risposte: a) $\sin(2 + \pi^4) - \sin 2$, b) 0 c) $4/3$.

Parte B

Esercizio 4. (5 punti)

a) Siano $R \in \mathbb{R}$, $h\colon (R, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $x_0 \in (R, +\infty)$ un punto di accumulazione per l'insieme $A = \{x \in (R, +\infty) \mid h(x) = 0\}$. Si dimostri che $h'(x_0) = 0$.

b) Si considerino le funzioni $f(x) = 1 - e^{-x}$ e $g(x) = 1 - \cos x$, definite per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si determini l'insieme dei punti di accumulazione di $A = \{x \in (\log 10, +\infty) \mid f(x) = g(x)\}$.

Risposte: a) Sia $x_n \to x_0$ con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$. Per continuità di h, $h(x_0) = 0$, quindi per il teorema ponte, $h'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{0-0}{x_n-x_0} = 0$, b) $\emptyset$.

Esercizio 5. (5 punti) Si determinino i valori dei tre parametri reali a, b, e c tali che il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-2x^3+7x^2+1}-a\,x^2-b\,x-c\right)$$

i) non esista; ii) sia uguale a $+\infty$; iii) sia finito; iv) sia uguale a 1.

Risposte:

i) Il limite esiste sempre (finito o infinito) per ogni scelta di a, b, c;

ii) $a<1$, $\forall b,\, c\in\mathbb{R}$ oppure $a=1$, $b<-1$, $\forall c\in\mathbb{R}$;

iii) $a=1$, $b=-1$, $\forall c\in\mathbb{R}$;

iv) $a=1$, $b=-1$, $c=2$.

Parte C

Esercizio 6. (8 punti) Al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$, si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \int_0^{1/n} \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}\, dt.$$

a) Per quali valori di $\alpha \in (0, +\infty)$ la serie converge assolutamente?

b) Per quali valori di $\alpha \in (0, +\infty)$ la serie converge semplicemente?

Risposte:

a) Per ogni $n \geq 1$, definiamo $a_n = n \int_0^{1/n} \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}\, dt$ e $b_n = (-1)^n a_n$. Osserviamo che, se $t \in (0, \frac{1}{n})$, $\frac{(\log(1+t))^\alpha}{t} > 0$. Quindi $|b_n| = a_n$. Dato che $\frac{(\log(1+t))^\alpha}{t} \sim t^{\alpha-1}$ per $t \to 0^+$, esiste $t_0 > 0$ tale che, per ogni $t \in (0, t_0)$,

$$\frac{1}{2} t^{\alpha-1} \leq \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t} \leq 2t^{\alpha-1}.$$

In particolare, per il Criterio del Confronto per gli integrali impropri, l'integrale improprio $\int_0^{1/n} \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}\, dt$ converge, essendo $1 - \alpha < 1$. Inoltre, per n sufficientemente grande,

$$\frac{n^{-\alpha}}{2\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^{1/n} t^{\alpha-1}\, dt \leq \int_0^{1/n} \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}\, dt \leq 2\int_0^{1/n} t^{\alpha-1}\, dt = \frac{2n^{-\alpha}}{\alpha},$$

cosicché

$$\frac{n^{1-\alpha}}{2\alpha} \leq a_n \leq \frac{2n^{1-\alpha}}{\alpha}. \tag{1}$$

Per il Criterio del Confronto per le serie, concludiamo allora che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (cioè che la serie data converge assolutamente) se e solo se $\alpha > 2$.

b) Notiamo che (1) implica che la successione $\{a_n\}$ è infinitesima se e solo se $\alpha > 1$. Quindi la successione $\{b_n\}$ è infinitesima se e solo se $\alpha > 1$. Segue che per $\alpha \leq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ non converge. Avendo già concluso che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge assolutamente per $\alpha > 2$, rimane da studiarne il carattere per $\alpha \in (1, 2]$.

Consideriamo la funzione

$$F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}\, dt.$$

Osserviamo che, per $\alpha > 1$, la funzione $t \mapsto \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}$ si prolunga con continuità in $t = 0$. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, F è derivabile in $(0, +\infty)$ e

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}\, dt + \frac{(\log(1+x))^\alpha}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int_0^x (f(x) - f(t))\, dt, \tag{2}$$

dove

$$f(t) = \frac{(\log(1+t))^\alpha}{t}.$$

La funzione f è derivabile in $(0, +\infty)$ e

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\alpha(\log(1+t))^{\alpha-1}\frac{t}{t+1} - (\log(1+t))^\alpha}{t^2} \\ &= \frac{(\log(1+t))^{\alpha-1}}{t^2}\left(\alpha\frac{t}{t+1} - \log(1+t)\right) = \frac{(\log(1+t))^{\alpha-1}}{t^2}\left(\alpha\frac{t}{t+1} - t + o(t)\right) \\ &= \frac{(\log(1+t))^{\alpha-1}}{t}(\alpha - 1 + o(1)) \quad \text{per } t \to 0. \end{aligned}$$

Quindi $f'(t) > 0$ per $t > 0$ sufficientemente piccolo. Segue che esiste $r > 0$ tale che f è strettamente crescente in $(0, r)$, quindi $f(x) - f(t) > 0$ per ogni $x \in (0, r)$ e $t \in (0, x)$ e, in virtù di (2), $F'(x) > 0$ per ogni

$x \in (0, r)$. Abbiamo così dimostrato che F è strettamente crescente in $(0, r)$. Questo implica direttamente che la successione $a_n = F(1/n)$ è strettamente decrescente definitivamente. Quindi, se $\alpha > 1$, $\{a_n\}$ è monotona definitivamente e infinitesima. Il criterio di Leibniz consente di concludere che, se $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Riassumendo le conclusioni ottenute, abbiamo che la serie data converge semplicemente se e solo se $\alpha > 1$ e converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$.