Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

12 Aprile 2024

Cognome:______________________________ nome:______________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_{-1}^{1} (x - e^t)^2 \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_{1}^{2} 2xe^t \,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = \dfrac{e^t}{u} + x \\ x(1) = -e/4 \\ 1 \le u \le 2 \end{cases}$$

In order to solve B–H–J equation, we suggest to find the solution in the family of functions
$\mathcal{F} = \{V(t,x) = Axe^t + Bxe^{-t} + Ct + De^{2t} + E, \ A, B, C, D, E \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases} \tag{1}$$

con f, g e ψ funzioni continue e $\boldsymbol{\alpha}$, t_0 e t_1 fissati.

i. Sotto opportune ipotesi, si enuncino e si provino la condizione necessaria di Bellman–Hamilton–Jacobi e la condizione finale affinchè V sia funzione valore V del problema (1);

ii. sotto opportune ipotesi, si enunci una condizione sufficiente affinchè V sia la funzione valore per il problema (1) e $\mathbf{u}^*$ suo controllo ottimo.

4. (6 punti) Nel contesto della teoria dei giochi differenziali di cattura-evasione, si consideri il modello "the lady in the lake":

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \ \min\limits_{u_M} |\theta(T)| \qquad \textit{Lady (E)}: \ \max\limits_{u_L} |\theta(T)| \\ |u_M| \le 1 \\ \dot{\theta} = \dfrac{v_L \sin u_L}{r} - \dfrac{u_M}{R} \\ \dot{r} = v_L \cos u_L \\ r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

con v_L fissato in $(0,1)$, $R > 0$ fissato e $T > 0$ libero.

i. Si illustri il modello proposto, introducendo le variabii di stato, i controlli, la dinamica, il target set; si costruisca il game set;

ii. si determini un equilibrio di Nash per il problema proposto. In particolare è richiesto lo studio sulla possibilità che i due giocatori realizzino il loro pay off, cioè del segno di $\theta(T^*)$ al tempo ottimo di uscita T^*.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco di cattura–evasione

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}\text{: } \min_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \textit{Evader}\text{: } \max_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{u}_1(t) \in U_1, \qquad \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_0^{T_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad (0, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T} \\ (T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \in \partial\mathcal{T} \end{cases}$$

con target set $\mathcal{T}$ dato da

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$$

ove $\mathcal{T}_0$ è chiuso, con game set $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ e con $T_{\mathbf{x}}$ tempo di uscita della traiettoria; le funzioni f, g e ψ siano continue.

i. Si provi che la funzione valore V^- non dipende esplicitamente dal tempo, cioè

$$V^-(t, \mathbf{x}) = V^-(\mathbf{x}), \qquad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{G};$$

ii. si provi che

$$\mathcal{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n;$$

iii. si provi che se V^- è in $C^1(\mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0))$, allora l'equazione inferiore di Isaacs diventa

$$\begin{cases} H^-_{DP}(\mathbf{x}, \nabla V^-(\mathbf{x})) = 0 & \text{perr } \mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0) \\ V^-(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{T}_0 \end{cases}$$