Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

9 Febbraio 2024

Cognome:______________________________ nome:______________________________

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max\limits_{u} \displaystyle\int_0^5 x_2 \,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = 2ux_1 \\ \dot{x}_2 = 2(1-u)x_1 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 3 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \min\limits_{u} \displaystyle\int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}t + (x(1))^2 \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

In order to solve BHJ equation, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V(t,x) = h(t)x^2,\ h \in C^1(\mathbb{R})\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} \ J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con f, g e ψ continue, U chiuso e con t_0, t_1 e $\boldsymbol{\alpha}$ fissati.

i. Si definisca la funzione valore per il problema proposto e si forniscano, sotto opportune ipotesi, condizioni necessarie affinché una funzione sia la funzione valore del problema: si dimostri almeno una di queste condizioni necessarie;

ii. sotto opportune ipotesi, si forniscano condizioni sufficienti affinché una funzione sia la funzione valore del problema: si dimostrino tali condizioni sufficienti.

4. (6 punti) Si consideri il seguente problema della "Dubin car":

$$\begin{cases} \min\limits_{u} T \\ \dot{x}_1 = \cos\theta \\ \dot{x}_2 = \sin\theta \\ \dot{\theta} = u \\ x_1(0) = 4, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \theta(0) = \pi/2 \\ x_1(T) = 0, \qquad x_2(T) = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases}$$

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco differenziale a somma zero:

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

ove T è fissato e U_i sono i control set per i due giocatori.

i. Si introducano, con rigore e con le ipotesi necessarie, le definizioni di strategie non anticipative e la relativa definizione di funzione valore inferiore V^- e di funzione valore superiore V^+. Quando si dice che il problema (1) ammette funzione valore V?

ii. Si consideri il gioco a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{u_1} J(u_1, u_2) \qquad \text{Player II: } \min\limits_{u_2} J(u_1, u_2) \\ |u_1| \le 1 \qquad\qquad |u_2| \le 1 \\ J(u_1, u_2) = \int_0^\infty \operatorname{sgn}(x) \left(1 - e^{-|x|}\right) e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ \dot{x} = (u_1 - u_2)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Si provi che non ammette funzione valore.

iii. Si consideri ora il problema

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \psi(T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \\ (T_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}(T_{\mathbf{x}})) \in \mathcal{T} \end{cases} \tag{2}$$

dove $\mathcal{T} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ é il target set chiuso; sia $\mathcal{G} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ il game set. Si supponga che il problema ammetta funzione valore in $C^1(\mathcal{G} \setminus \mathcal{T})$ e che sia soddisfatta la condizione di Isaacs (se necessario si aggiungano altre ipotesi): sia $(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*)$ un equilibrio di Nash nella classe delle strategie feedback per il problema (2) con traiettoria $\mathbf{x}^*$, con $\mathbf{x}^*(0) = \boldsymbol{\alpha}$, $(0, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ ed exit time $T_{\mathbf{x}^*}$. Si fornisca una dimostrazione geometrica che V soddisfa l'equazione di Isaacs per il problema (2) lungo l'optimal path.