Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

12 Gennaio 2024

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_{-1}^{1} (tx - u^2)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = x + u^2 \\ x(-1) = -\frac{2}{e} - 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \displaystyle\max_u \int_0^T \sqrt{u}\,\mathrm{d}t + \sqrt{x(T)} \\ \dot{x} = -u \\ x(0) = x_0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

for T and x_0 positive and fixed.

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions $\mathcal{F} = \{V(t,x) = a\sqrt{x}, \text{ with } a = a(t)\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x},\mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \displaystyle\max_{\mathbf{u}\in\mathcal{C}} \; J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0,t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k, \; \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati, nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate, uniformemente continue e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$.

i. Si introduca la nozione di soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi associato al problema assegnato;

ii. sia $V \in C^1$; si provi che essere soluzione del sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi é equivalente a essere soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi;

iii. si provi che la funzione valore è soluzione viscosa (la dimostrazione dell'unicità non è richiesta) per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi.

4. (6 punti) Si consideri il seguente modello di produzione e gestione del magazzino:

$$\begin{cases} \min\limits_u \displaystyle\int_0^T (\alpha u^2 + \beta x)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = u \\ x(0) = A \\ x(T) = B \\ u \geq 0 \end{cases}$$

ove $T > 0,\ 0 \leq A \leq B$ sono tutte costanti fisse.

i. Si introduca con precisione il modello;

ii. si risolva il modello proposto nel caso $\alpha = 1,\ \beta = 4,\ T = 2,\ B = 2$ e $|A| < 2$ (si noti che qui A puo' essere negativo).

In order to solve the BHJ equation we suggest to consider the family of functions

$\mathcal{F} = \{V(t,x) = a(t-2)^3 + b(x+2)(t-2) + c\frac{(x-2)^2}{t-2}$, with a, b, c non zero constants $\}$.

5. (6 punti) Si consideri il gioco differenziale a somma zero

$$\begin{cases} \text{Player I: } \max\limits_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \qquad \text{Player II: } \min\limits_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \displaystyle\int_0^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{1}$$

dove T è fissato, U_i sono insiemi chiusi.

i. Si fornisca la definizione di equilibrio di Nash per (1) nelle strategie open–loop; si fornisca, sotto opportune ipotesi, una condizione necessaria per avere un equilibrio di Nash nelle strategie open–loop.

ii. Si consideri ora in particolare il modello "war of attrition and attack" di Isaacs:

$$\begin{cases} \textit{Player A}\text{: } \max\limits_{\alpha} J(\alpha, \beta), \qquad \textit{Player B: } \min\limits_{\beta} J(\alpha, \beta) \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad\qquad 0 \leq \beta \leq 1 \\ J(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^T (1-\alpha)x_1 - (1-\beta)x_2\,\mathrm{d}t \\ \dot{x}_1 = m_1 - c_1\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = m_2 - c_2\alpha x_1 \\ x_i(0) = x_{i0} > 0, \qquad x_i(t) > 0 \end{cases}$$

con $c_1,\ c_2,\ m_1$ e m_2 costanti positive, con $c_2 > c_1$, $T > 0$ fissato e grande.

a. Si introduca il modello proposto;

b. si determinino gli equilibri di Nash nella classe delle strategie open–loop.