Università degli Studi di Milano-Bicocca - Laurea Magistrale in Matematica

Esame di metodi matematici per l'analisi economica – controllo ottimo

21 Giugno 2024

Cognome:____________________________ nome:____________________________

---

1. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo variazionale

$$\begin{cases} \min_u T \\ \dot{x} = x + u \\ x(0) = 5 \\ x(T) = 11 \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

2. (6 punti) Si risolva il seguente problema con il metodo della Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\int_0^\infty 2\sqrt{u}e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ \dot{x} = 2x - u \\ x(0) = 1 \\ x \geq 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

In order to solve B–H–J equation for the current value function, we suggest to find the solution in the family of functions $\mathcal{F} = \{V^c(x) = A\sqrt{x},\ x \geq 0,\ A \in \mathbb{R}\}$.

3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo autonomo

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(t_1)) \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} J(\mathbf{u}) \\ \mathcal{C} = \{\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to U \subset \mathbb{R}^k,\ \mathbf{u} \text{ ammissibile}\} \end{cases}$$

con t_0 e t_1 fissati, nelle ipotesi che il control set U sia compatto e che f, g e ψ siano limitate, uniformemente continue e Lipschitz rispetto a $\mathbf{x}$ uniformemente rispetto a $\mathbf{u}$.

i. Si introduca la nozione di soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi associato al problema assegnato;

ii. sia $V \in C^1$; si provi che essere soluzione del sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi é equivalente a essere soluzione viscosa per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi;

iii. si provi che la funzione valore è soluzione viscosa (la dimostrazione dell'unicità non è richiesta) per il sistema di Bellmann-Hamilton-Jacobi.

4. (6 punti) Si consideri il modello "lavoratori e capitalisti" di Lancaster:

$$\begin{cases} \text{Wor.: } \max_u \int_0^T u\alpha k \, \mathrm{d}t & \text{Cap.: } \max_v \int_0^T (1-v)(1-u)\alpha k \, \mathrm{d}t \\ 0 < a \le u \le b < 1 & 0 \le v \le 1 \\ \dot{k} = \alpha v(1-u)k & \\ k(0) = k_0 > 0 & \end{cases}$$

ove $\alpha > 0,\ a,\ b,\ T > 0$ e k_0 sono fissati.

i. Si introduca con rigore il modello proposto;

ii. nel caso $\alpha = 1$ e $b \ge 1/2$, si determini l'equilibrio di Nash open–loop nel modello proposto.

5. (6 punti) Si consideri il seguente gioco di cattura–evasione

$$\begin{cases} \textit{Pursuer}: \min_{\mathbf{u}_1} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), & \textit{Evader}: \max_{\mathbf{u}_2} J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{u}_1(t) \in U_1, & \mathbf{u}_2(t) \in U_2 \\ J(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_0^{T_\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \, \mathrm{d}t + \psi(\mathbf{x}(T_\mathbf{x})) & \\ \dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \qquad (0, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T} & \\ (T_\mathbf{x}, \mathbf{x}(T_\mathbf{x})) \in \partial\mathcal{T} & \end{cases}$$

con target set $\mathcal{T}$ dato da

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$$

ove $\mathcal{T}_0$ è chiuso, con game set $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ e con $T_\mathbf{x}$ tempo di uscita della traiettoria; le funzioni f, g e ψ siano continue.

i. Si provi che la funzione valore V^- non dipende esplicitamente dal tempo, cioè

$$V^-(t, \mathbf{x}) = V^-(\mathbf{x}), \qquad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{G};$$

ii. si provi che

$$\mathcal{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}_0 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n;$$

iii. si provi che se V^- è in $C^1(\mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0))$, allora l'equazione inferiore di Isaacs diventa

$$\begin{cases} H^-_{DP}(\mathbf{x}, \nabla V^-(\mathbf{x})) = 0 & \text{perr } \mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathcal{G}_0 \setminus \mathcal{T}_0) \\ V^-(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \mathcal{T}_0 \end{cases}$$