

Programma d'esame definitivo del corso di Analisi Matematica I

a.a. 2023/2024

V. Felli

G. Guerra

S. Secchi

I numeri reali. Campi e campi ordinati. Estremo superiore e estremo inferiore. Assioma di continuità. Definizione di \mathbb{R} come campo ordinato verificante l'assioma di continuità. Insieme dei numeri naturali come più piccolo sottoinsieme induttivo di \mathbb{R} . Simboli di sommatoria, produttoria e fattoriale. Principio di induzione. Proprietà di Archimede. Numeri interi e razionali. Irrazionalità di radice di 2. Parte intera di un numero reale, valore assoluto di un numero reale. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Potenze a esponente reale. Costante di Nepero.

I numeri complessi. Definizione, forma algebrica, modulo, complesso coniugato, parte reale e parte immaginaria, disuguaglianza triangolare. Forma trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso, prodotto e potenza in forma trigonometrica/esponenziale. Esponenziale complesso. Radici di un numero complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).

Funzioni. Definizione, grafico, immagine, composizione. Funzioni iniettive, funzione inversa, restrizioni di funzioni. Funzioni reali di variabile reale e loro grafico. Funzioni monotone, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo. Funzioni elementari e loro grafici. Successioni e sottosuccessioni.

Limiti. Punti di accumulazione e punti isolati per sottoinsiemi di \mathbb{R} . Definizione di limite. Unicità del limite, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto (dei due carabinieri). Limite della somma, del prodotto, del rapporto e della funzione composta. Forme indeterminate. Limiti notevoli. Limiti destro e sinistro. Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Confronti asintotici, simboli di o piccolo e O grande. Infiniti, infinitesimi e loro confronto.

Successioni reali. Successioni e limiti di successioni. Limitatezza delle successioni convergenti. Sottosuccessioni. Teorema di Bolzano–Weierstrass. Successioni monotone; il limite della successione $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ è il numero e (costante di Nepero). Criterio di Cauchy. Limite inferiore e limite superiore.

Continuità. Definizione di funzione continua. Continuità della funzione composta. Teorema della permanenza del segno. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Continuità della funzione inversa. Continuità delle funzioni elementari. Teorema ponte. Teorema di Weierstrass. Continuità uniforme. Continuità uniforme di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati (Heine–Cantor). Punti di discontinuità. Funzioni Lipschitziane.

Serie. Definizione. Serie convergenti, divergenti e indeterminate (oscillanti, irregolari). Serie geometrica e serie telescopiche. Condizione necessaria per la convergenza. Serie assolutamente convergenti e criterio della convergenza assoluta. Serie a termini positivi: criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio della radice e criterio del rapporto. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz.

Calcolo differenziale. Retta tangente al grafico di una funzione. Derivabilità. Derivata destra e sinistra. Punti angolosi, punti a tangente verticale e cuspidi. Continuità delle funzioni derivabili. Regole di derivazione: somma, prodotto, quoziente e derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata delle funzioni elementari. Punti di massimo e di minimo, relativi e assoluti. Teoremi di Fermat e di Rolle. Teorema di Lagrange e suoi corollari: le funzioni a derivata nulla su intervalli sono costanti, lipschitzianità delle funzioni a derivata limitata, relazioni tra monotonia di una funzione e segno della sua derivata. Teorema di Cauchy. Teorema di De l'Hôpital (solo enunciato). Teorema del limite della derivata. Derivate successive. Convessità/concavità di una funzione. Relazione tra il segno della derivata seconda e concavità/convessità di una funzione. Punti di flesso. Formule di Taylor e di McLaurin con resto in forma di Peano. Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange.

Calcolo integrale. Funzioni a scala (o costanti a tratti o semplici) e integrale di funzioni a scala. Proprietà dell'integrale delle funzioni a scala. Integrale inferiore e integrale superiore su un intervallo limitato. Definizione di integrabilità secondo Riemann. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Linearità e monotonia (confronto) dell'integrale di Riemann. Integrabilità della parte positiva/negativa e del modulo di una funzione integrabile. Integrabilità della restrizione di una funzione integrabile, integrale su intervalli orientati e additività rispetto al dominio. Integrabilità delle funzioni con un numero finito di punti di discontinuità e delle funzioni monotone. Teorema della media integrale. La funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Primitive, integrale indefinito. Integrazione per parti e per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali fratte. Integrali impropri.

Testo di riferimento

- E. Giusti: *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri.

Altri testi consigliati.

- G. De Marco: *Analisi Uno*, Zanichelli Decibel.
- C. D. Pagani, S. Salsa: *Analisi matematica 1*, Zanichelli.

Eserciziari consigliati.

- E. Giusti: *Esercizi e complementi di analisi matematica, volume 1*, Bollati Boringhieri.
- G. De Marco, C. Mariconda: *Esercizi di calcolo in una variabile*, Zanichelli Decibel.
- S. Salsa, A. Squellati: *Esercizi di analisi matematica 1*, Zanichelli.
- Per problemi con difficoltà più elevata: E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo: *Problemi scelti di analisi matematica. Vol. 1*, Liguori.

Selezione delle dimostrazioni richieste nella seconda parte della prova scritta

1. Proprietà di Archimede.
2. Formula per le radici n -esime di un numero complesso.
3. Disuguaglianza triangolare in \mathbb{C} .
4. Teorema di Bolzano–Weierstrass.
5. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} .
6. Unicità del limite, permanenza del segno, limite di somma, prodotto e quoziente.
7. Teorema dei due carabinieri.
8. Esistenza del limite per funzioni monotone.
9. Limite e continuità della funzione composta.
10. Teorema degli zeri, teorema dei valori intermedi.
11. Criterio di Cauchy.
12. Teorema ponte.
13. Condizione necessaria per la convergenza di una serie.
14. Criteri di convergenza per serie a termini positivi (confronto, confronto asintotico, radice, rapporto).
15. Criterio della convergenza assoluta.
16. Teorema di Weierstrass.
17. Continuità delle funzioni derivabili.
18. Regole di derivazione: somma, prodotto, quoziente e derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa.
19. Derivata delle funzioni elementari: esponenziale, logaritmo, seno, potenze, tangente, arcotangente e arcoseno.
20. Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange e di Cauchy.
21. Le funzioni a derivata nulla su intervalli sono costanti.
22. Relazioni tra monotonia di una funzione e segno della sua derivata.

23. Relazione tra derivata seconda e concavità/convessità e flessi di una funzione.
24. Linearità e monotonia (confronto) dell'integrale di Riemann.
25. Integrabilità delle funzioni continue, delle funzioni con un numero finito di punti di discontinuità e delle funzioni monotone.
26. Teorema della media (integrale).
27. Teorema fondamentale del calcolo.
28. Integrazione per parti e per sostituzione.
29. Criterio del confronto per integrali impropri.