# TEST D'IPOTESI

- Test per valutare l'associazione tra due caratteri: Chi-Quadrato

# Esempio motivante: Disturbi respiratori all'età di 14 anni e bronchiti prima dei 5 anni (Long-Term Consequences of Respiratory Disease in Infancy. Holland et al. 1978)

OBIETTIVO : valutare se vi è associazione tra bronchite nell'infanzia e disturbi respiratori (tosse).

Segnalazione di disturbi respiratori (tosse) durante il giorno e la notte all'età di 14 anni e di bronchiti prima dei 5 anni (Holland et al. 1978).

I DATI OSSERVATI possono essere rappresentati nella tabella di contingenza:

| | **Bronchite prima dei 5 anni** | | |
|---|---|---|---|
| | **sì** | **no** | **Totale** |
| **Tosse** | 26 | 44 | 70 |
| **No tosse** | 247 | 1002 | 1249 |
| **Totale** | 273 | 1046 | 1319 |

# Test per l'associazione tra due caratteri

| | Bronchite prima dei 5 anni | | |
|---|---|---|---|
| | **sì** | **no** | **Totale** |
| **Tosse** | 26 | 44 | 70 |
| **No tosse** | 247 | 1002 | 1249 |
| **Totale** | 273 | 1046 | 1319 |

Sistema di Ipotesi :

$H_0$ : NON vi è associazione tra bronchite entro i 5 anni e disturbi respiratori (tosse) a 14 anni

$H_1$ : Vi è associazione tra bronchite entro i 5 anni e disturbi respiratori (tosse) a 14 anni

I metodi per la verifica di ipotesi visti sino ad ora si basano su

1. una statistica test "sensibile" ad indicare delle deviazioni da $H_0$ (z o t)
2. la distribuzione di tale statistica sotto Ho (Gaussiana, t di Student)

In base a queste considerazioni

- si calcola il valore della statistica nel campione
- si decide se è verosimile che tale valore provenga da $H_0$ confrontandolo con una zona di rifiuto costruita sulla distribuzione al punto 2.

Nella verifica di ipotesi sulla ASSOCIAZIONE la statistica test si ottiene **confrontando** le tabelle di contingenza

osservata nel campione ed attesa sotto $H_0$

# Costruzione della tabella attesa sotto $H_0$

Tabella di contingenza OSSERVATA

| | Y | N | Totale |
|---|---|---|---|
| **Tosse** | 26 | 44 | 70 |
| **No tosse** | 247 | 1002 | 1249 |
| **Totale** | 273 | 1046 | 1319 |

Tabella di contingenza ATTESA sotto $H_0$

Se la probabilità di segnalazione di tosse fosse la stessa:

- quante segnalazioni attendo per chi ha avuto la bronchite?
- quante per chi non la ha avuta?

La stima della probabilità di "tosse" indipendentemente dall'esperienza di bronchite (sotto $H_0$) è 70/1319 = 0.053

Sotto $H_0$ attendiamo

***273*** · 0.053 = 14.5 segnalazioni in "Y"

***1046*** · 0.053 = 55.5 segnalazioni in "N"

# Costruzione della tabella attesa sotto Ho

Tabella di contingenza OSSERVATA

| | Y | N | Totale |
|---|---|---|---|
| **Tosse** | 26 | 44 | 70 |
| **No tosse** | 247 | 1002 | 1249 |
| **Totale** | 273 | 1046 | 1319 |

Tabella di contingenza ATTESA sotto $H_0$

| | Y | N | Totale |
|---|---|---|---|
| **Tosse** | 14.5 | 55.5 | 70 |
| **No tosse** | 273-14.5 =258.5 | 1046- 55.5 =990.5 | 1249 |
| **Totale** | 273 | 1046 | 1319 |

La frequenza attesa di ciascuna cella si ottiene come

[ (tot. riga) · (tot. colonna) ] / (tot. generale)

Il confronto tra le freq. nelle tabelle OSSERVATA vs ATTESA sotto $H_0$, ci da' un'idea di quanto la realtà sia compatibile con $H_0$

# Costruzione della tabella attesa sotto Ho

Tabella di contingenza

OSSERVATA

| | Y | N | Totale |
|---|---|---|---|
| **Tosse** | 26 | 44 | 70 |
| **No tosse** | 247 | 1002 | 1249 |
| **Totale** | 273 | 1046 | 1319 |

Tabella di contingenza

ATTESA sotto $H_0$

Se tosse e bronchite fossero indipendenti:
quante segnalazioni attendo
per chi ha avuto la bronchite?

Come calcolo $E(n_{ij})$?

Dalla definizione di indipendenza ($T \perp Y$)

$$E(n_{ij}) = n*P(T \cap Y) = n*P(T)P(Y) = n*(n_{i.}/n)*(n_{.j}/n) ) = n*(n_{i.}*n_{.j})/n^2$$

$$E(n_{ij}) = n_{i.}*n_{.j}/n$$

Da cui $n_{ty} = 70*273/1319 = 14.5$

# Confronto tra tabella osservata ed attesa sotto Ho

Statistica Test

$$\chi^2 = \sum_{\substack{\text{celle della} \\ \text{tabella di contingenza}}} \frac{(freq.oss. - freq.att.)^2}{freq.att.} = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

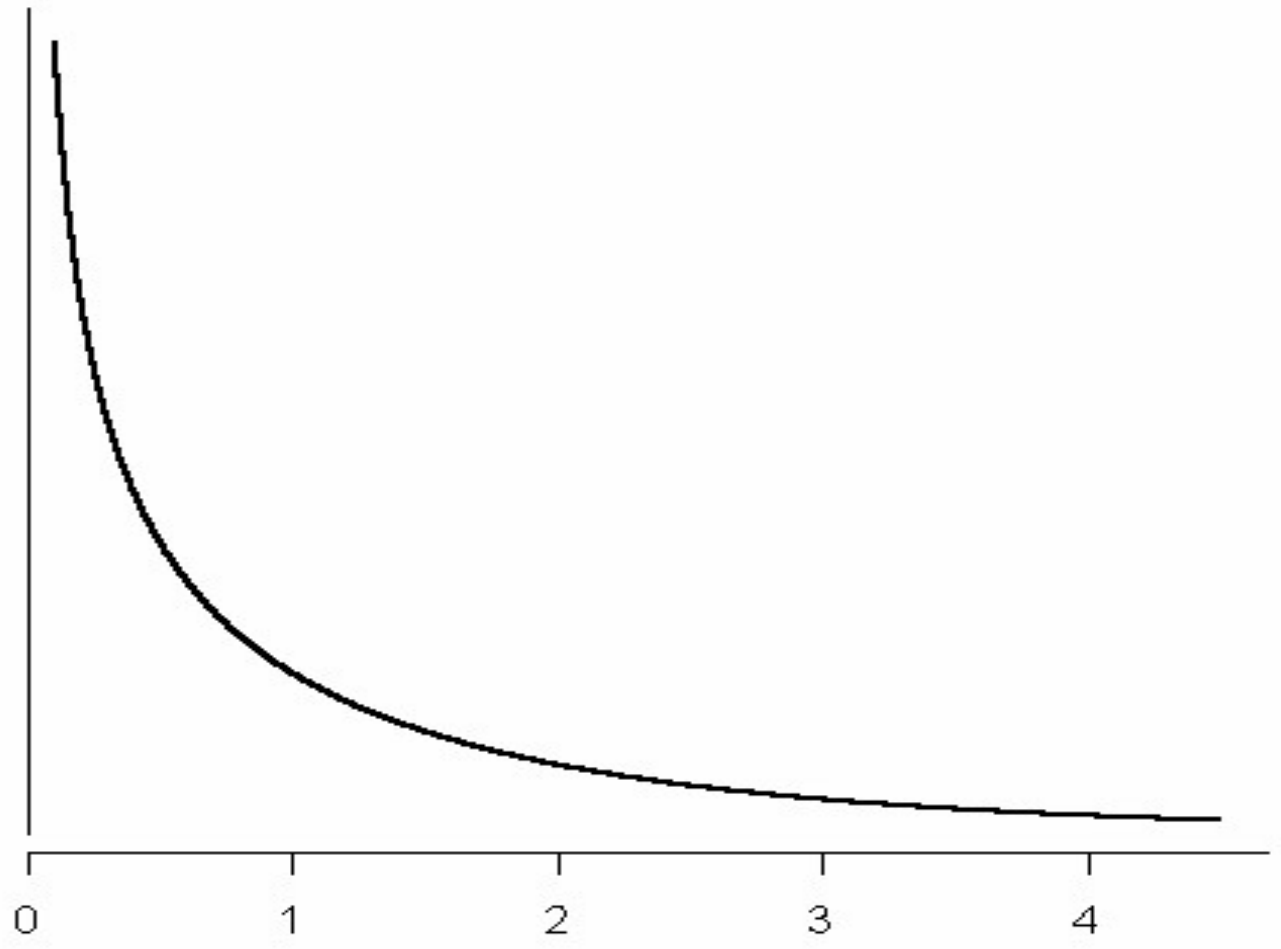
1. La statistica $\chi^2$ è "sensibile" ad indicare delle deviazioni da $H_0$, piu' è grande meno è verosimile che Ho sia vera
2. Sotto $H_0$ $\chi^2$ ~ Chi-Quadrato con 1 grado di libertà ( $\chi^2(1)$ )

Il valore della statistica nel campione è

$$\chi^2 = \frac{(26-14.5)^2}{14.5} + \frac{(44-55.5)^2}{55.5} + \frac{(247-258.5)^2}{258.5} + \frac{(1002-990.5)^2}{990.5} = 12.18$$

12.18 andrà confrontato con la zona di rifiuto unilaterale costruita sulla distribuzione Chi-Quadrato con 1 grado di libertà

# DISTRIBUZIONE Chi-quadrato 1 g.d.l




Si dimostra che $X^2(1) \sim Z^2$ dove $Z \sim N(0,1)$

$x^2_{\alpha}(1) = (z_{a/2})^2$ quindi $X^2_{0.05}(1) = (1.96)^2 = 3.84$

# Test Chi-quadrato

Sotto $H_0$, $\chi^2$ si distribuisce secondo una Chi-Quadrato con 1 grado di libertà

E' verosimile che 12.18 provenga da tale distribuzione ?

- Si determina una zona di rifiuto <u>unilaterale</u> con una probabilità totale di errore del I tipo pari ad $\alpha$

  La zona di rifiuto deve essere costituita solo dalla coda di destra perché SOLO valori elevati della statistica test portano a sospettare che $H_0$ sia falsa

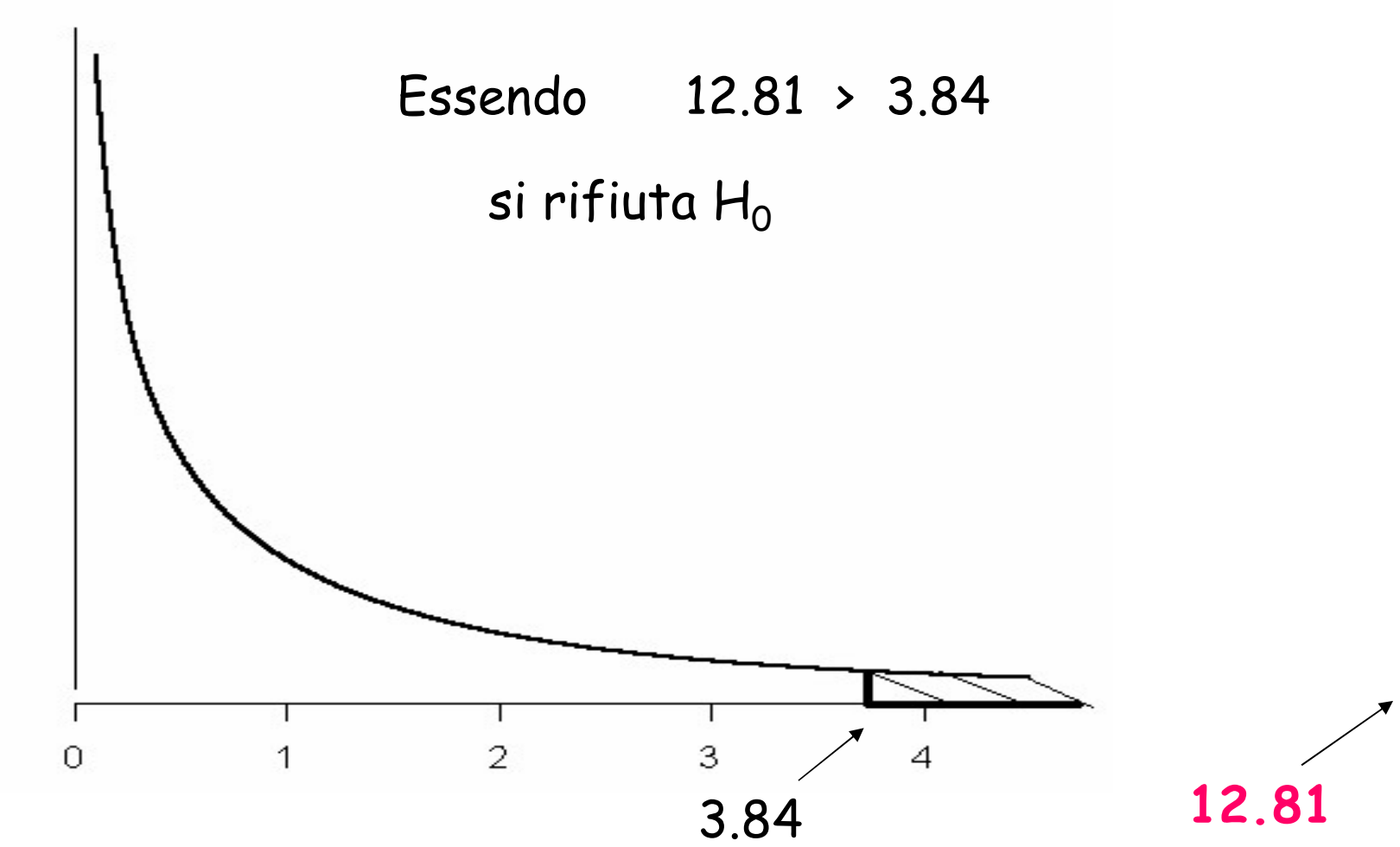
- Si rifiuta $H_0$ se $\chi^2 > \chi^2_\alpha(1)$

  Per $\alpha = 0.05$ $\chi^2_\alpha (1) = 3.84$

# Test Chi-quadrato

Essendo 12.81 > 3.84

si rifiuta $H_0$




I dati suggeriscono che sussiste una relazione tra gli episodi di tosse manifestati e l'aver avuto o meno una storia di bronchite.

# Estensione del Test Chi-quadrato

Sino a questo punto abbiamo considerato il confronto di

- una caratteristica che assume due modalità (tosse/no)
- in due gruppi (bronchite/no )

mediante una soluzione basata su una analisi della associazione tra due caratteri.

Questa soluzione è anche estendibile al confronto di

- una caratteristica che assume due o più modalità
- in due o più gruppi

# Esempio motivante: problemi mestruali e pratica sportiva

OBIETTIVO : E' noto che le donne che praticano sport hanno in media un numero più ridotto di cicli mestruali. Ci si chiede se a seconda della pratica sportiva vi sia anche una differente insorgenza di problemi mestruali

Si osservano :

- pratica sportiva (NO; Sì, amatoriale; Sì, professionale)
- manifestazione di problemi mestruali (Sì, NO)

in una coorte di donne

METODOLOGIA

si valuta se vi sia associazione tra pratica sportiva e manifestazione di problemi mestruali

I DATI OSSERVATI possono essere rappresentati nella tabella di contingenza

| *Problemi mestruali* ---------- *Sport* | Sì | NO | Totale |
|---|---|---|---|
| NO | 14 | 40 | ***54*** |
| Sì , amatoriale | 9 | 14 | ***23*** |
| Sì , professionale | 46 | 42 | ***88*** |
| Totale | ***69*** | ***96*** | ***165*** |

Sistema di Ipotesi :

$H_0$ : NON vi è associazione tra pratica sportiva e problemi mestruali

$H_1$ : Vi è associazione tra pratica sportiva e problemi mestruali

# Costruzione della tabella attesa sotto Ho

Tabella di contingenza OSSERVATA

| *Problemi mestruali* ---------- *Sport* | Sì | NO | Totale |
|---|---|---|---|
| NO | 14 | 40 | ***54*** |
| Sì , amatoriale | 9 | 14 | ***23*** |
| Sì , professionale | 46 | 42 | ***88*** |
| Totale | ***69*** | ***96*** | ***165*** |

Tabella di contingenza ATTESA sotto $H_0$

Se la probabilità di avere problemi mestruali fosse la stessa,

- quante segnalazioni per chi non pratica sport?
- e cosi' via ...

La stima della probabilità di avere problemi mestruali (sotto $H_0$) è 69/165 = 0.4182

# Costruzione della tabella attesa sotto $H_0$

Tabella di contingenza OSSERVATA

| *Sport* | Pr.Mes. Sì | Pr.Mes. NO | Totale |
|---|---|---|---|
| NO | 14 | 40 | ***54*** |
| Sì amatoriale | 9 | 14 | ***23*** |
| Sì profess. | 46 | 42 | ***88*** |
| Totale | ***69*** | ***96*** | ***165*** |

Tabella di contingenza ATTESA sotto $H_0$

| *Sport* | Pr. Mes. SI | Pr. Mes. NO | Totale |
|---|---|---|---|
| NO | 0.418·**54** = 22.57 | **54** - 22.57 = 31.43 | ***54*** |
| Sì amatoriale | 0.418·**23** = 9.61 | **23** - 9.61 = 13.39 | ***23*** |
| Sì profess. | 0.418·**88** = 36.78 | **88** - 36.78 = 51.22 | ***88*** |
| Totale | ***69*** | ***96*** | ***165*** |

In alternativa, (69 · 54)/165 , (96 · 54)/165 e cosi' via

# Confronto tra tabella osservata ed attesa sotto Ho

Statistica Test

$$\chi^2 = \sum_{\substack{\text{celle della} \\ \text{tabella di contingenza}}} \frac{(freq.oss. - freq.att.)^2}{freq.att.} = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

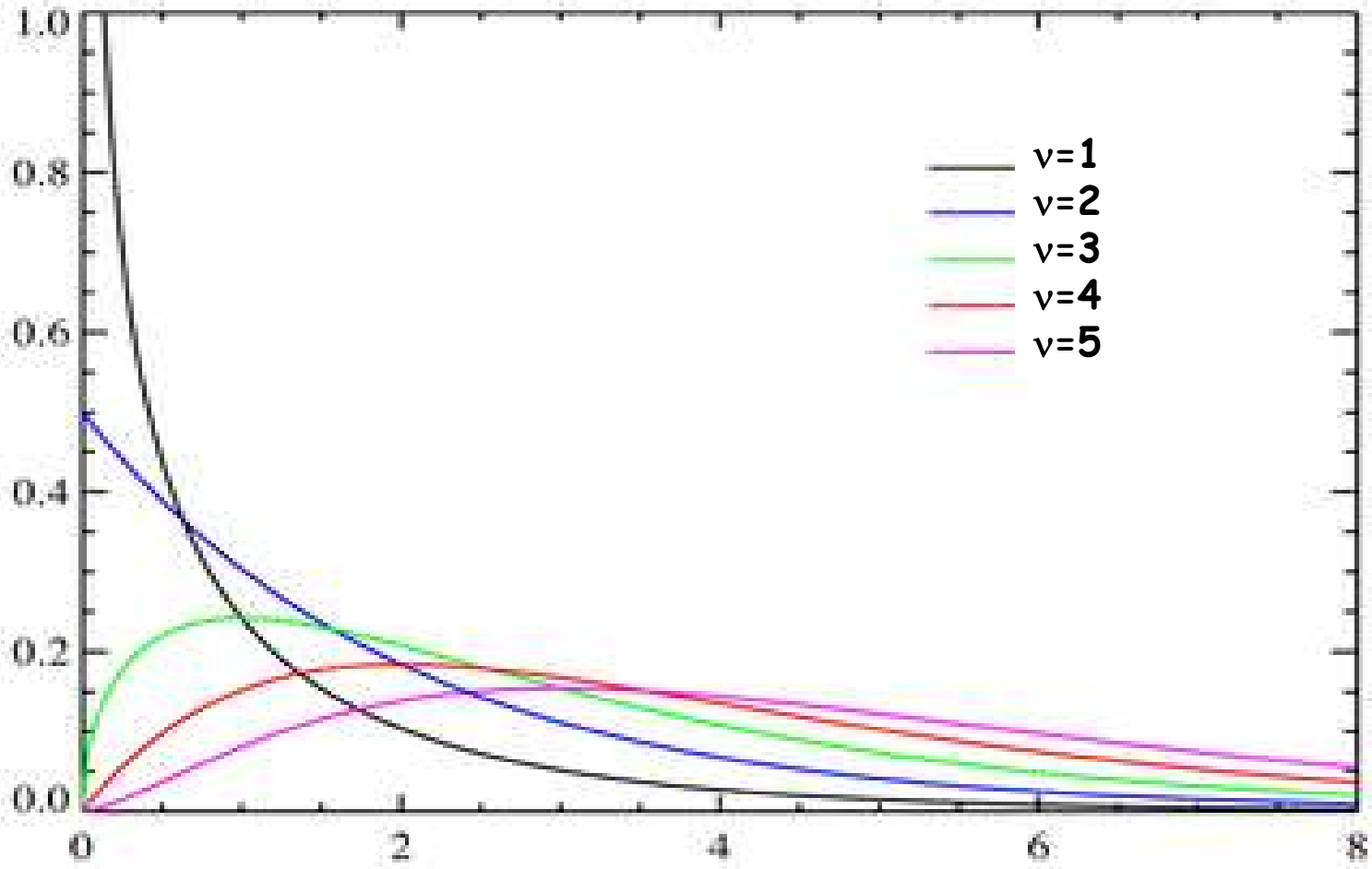
1. Sotto Ho $\chi^2$ ~ Chi( (n-1) · (m-1) ) dove m ed n sono il numero di modalità dei 2 caratteri

Il valore della statistica nel campione è

$$\chi^2 = \frac{(14-22.57)^2}{22.57} + \ldots + \frac{(42-51.22)^2}{51.22} = 9.63$$

9.63 andrà confrontato con la zona di rifiuto unilaterale costruita sulla distribuzione Chi-Quadrato con (2-1)·(3-1) g.d.l.

# DISTRIBUZIONE Chi-Quadrato $\nu$ gradi di libertà




Si noti che all'aumentare dei gradi di libertà aumenta la dispersione della distribuzione

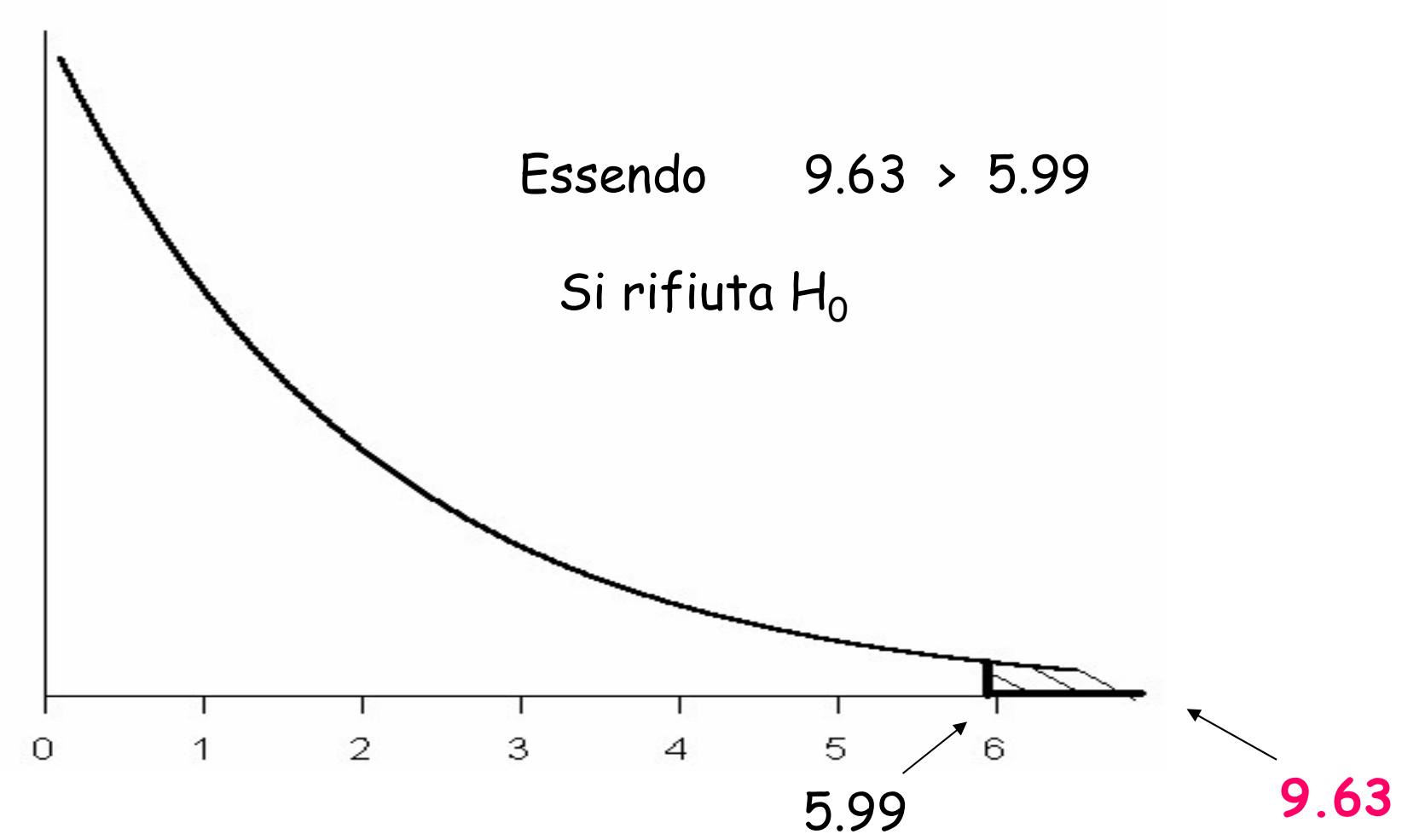
# Chi-Quadrato $\nu$ gradi di libertà - FRATTILI

| | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.001$ |
|---|---|---|---|
| $\nu = 1$ | 3.84 | 6.63 | 10.83 |
| $\nu = 2$ | 5.99 | 9.21 | 13.82 |
| $\nu = 3$ | 7.81 | 11.34 | 16.27 |
| $\nu = 4$ | 9.49 | 13.28 | 18.47 |
| $\nu = 5$ | 11.07 | 15.09 | 20.52 |
| ..... | | | |

## Chi-square Distribution Table

| d.f. | .995 | .99 | .975 | .95 | .9 | .1 | .05 | .025 | .01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 |

# Test Chi-quadrato




Essendo 9.63 > 5.99

Si rifiuta $H_0$

I dati suggeriscono che vi è associazione tra pratica sportiva e manifestazione di problemi mestruali

# Errore comune sull'associazione:

# assumere che l'associazione implichi causalità

Associazione NON implica causalità (non implica che una variabile abbia influenza sulla distribuzione dell'altra variabile)!

L'associazione tra due variabile può esser causale, non causale (o contenere entrambe).

# Un esempio di studio OSSERVAZIONALE

I dati storici mostrano che gli aumenti delle vendite di gelato sono associati ad aumenti degli annegamenti.
Il gelato provoca annegamenti ?
L'errore è

- Non considerare la temperatura (variabile confondente )
- l'incapacità di vedere che all'aumentare della temperatura aumentano le vendite di gelati e aumentano gli annegamenti perché più persone nuotano.


temperature ice cream sales drownings

# Esercizio

In un esperimento condotto su 1602 bambini con l'obbiettivo di valutare l'efficacia di un vaccino in spray nasale si sono osservati i seguenti risultati. Su 1070 bambini che hanno ricevuto il vaccino 14 hanno contratto l'influenza, mentre 95 dei 532 che hanno ricevuto il placebo hanno contratto l'influenza.

Valutare l'associazione tra vaccino e influenza con errore I tipo di 0.01.

H0 : NON vi è associazione tra vaccino spray nasale e influenza

H1 : Vi è associazione tra vaccino spray nasale e influenza

| TAB. CONTIGENZA OSSERVATA | CASI DI INFLUENZA | CASI DI NON INFLUENZA | TOT |
|---|---|---|---|
| VACCINO SPRAY | 14 | 1056 | 1070 |
| PLACEBO | 95 | 437 | 532 |
| TOT | 109 | 1493 | 1602 |

| TAB. CONTIGENZA ATTESA SOTTO $H_0$ | CASI DI INFLUENZA | CASI DI NON INFLUENZA | TOT |
|---|---|---|---|
| VACCINO SPRAY | 72,8 | 997,2 | 1070 |
| PLACEBO | 36,2 | 495,8 | 532 |
| TOT | 109 | 1493 | 1602 |

$$\chi^2_{1\ gdl}=\frac{(14-\ \ ,8)^2}{72,8}+\frac{(1056-997,2)^2}{997,2}+\frac{(95-36,2)^2}{36,2}+\frac{(437-495,8)^2}{495,8}=153,46$$

153>> 6,63

Rifiuto l'ipotesi nulla di assenza di associazione.

Esiste un'associazione significativa tra vaccino spray nasale e influenza!