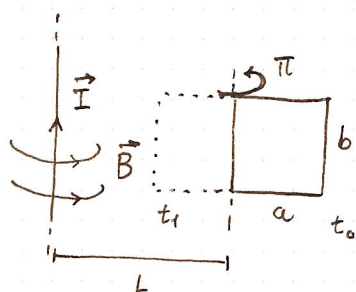


• Tempi d'esame

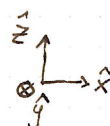
1. Spira ruotata in modo arbitrario [2° prova, esame 2018-02-05]



Spira rettangolare, lati a, b viene ruotata di π attorno in lato. Si trova a L da un filo di corrente $\vec{I}$. Calcola la carica totale Q che scorre nella spira.

- Calcoliamo il flusso a t_0 e t_1 .

$$\Phi(t_0) = \oint_{A(t_0)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_L^{L+a} dx \int_0^b dz \hat{y} \cdot \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \log\left(\frac{L+a}{L}\right)$$



$$\Phi(t_1) = \oint_{A(t_1)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{L-a}^L dx \int_0^b dz (-\hat{y}) \cdot \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y} \right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} b \log\left(\frac{L}{L-a}\right)$$

- $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ $I'(t) = +\frac{\mathcal{E}(t)}{R}$ con resistenza R . Per definizione $I = \frac{dQ}{dt}$,

$$\Rightarrow Q = \int_{t_0}^{t_1} I'(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{\Phi(t_0) - \Phi(t_1)}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \log\left(\frac{L+a}{L-a}\right)$$

2. Spira in campo non-uniforme [2° compito, 2018-04-24]

Spira quadrata, vincolata nel piano (!),
velocità iniziale $\vec{v}_0$, $\vec{B} = B_0 \hat{z} (1 + \alpha x)$

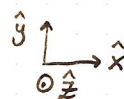


$\vec{v} \vec{B} \rightarrow$

Calcolare: 1. $\vec{v}(t)$

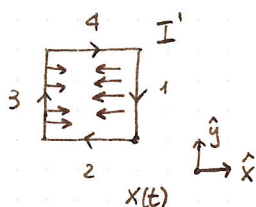
2. Q totale fluita a $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \Phi(t) &= \int_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{x(t)-L}^{x(t)} dx' \int_{-L/2}^{+L/2} dy' \hat{z} \cdot B_0 \hat{z} (1 + \alpha x') = \\ &= B_0 L \left[x' + \frac{\alpha x'^2}{2} \right]_{x(t)-L}^{x(t)} = B_0 L \left[L + \frac{\alpha}{2} (x(t)^2 - (x(t)-L)^2) \right] \\ &= B_0 L^2 \left[1 + \frac{\alpha}{2} (L + 2x(t)) \right] \end{aligned}$$



quindi $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 L^2 \frac{\alpha}{2} \frac{dx}{dt} = -B_0 L^2 \alpha v(t)$ e $I' = -\frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{R} = -\frac{B_0 L^2 \alpha}{R} v(t)$

- La corrente indotta causa una forza $\vec{F} = \oint_{A(t)} I' d\vec{l} \times \vec{B}$:



$$d\vec{F}_1 = I'(t) (-\hat{y} dy) \times (B_0 \hat{z} (1 + \alpha x(t))) = -I'(t) B_0 (1 + \alpha x(t)) \hat{x}$$

$$d\vec{F}_3 = +I'(t) B_0 [1 + \alpha (x(t) - L)] \hat{x}$$

$$d\vec{F}_2 = -d\vec{F}_4$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \oint_{A(t)} I' d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{A(t)} (d\vec{F}_1 + d\vec{F}_3) = \int_{-L/2}^{+L/2} dy (d\vec{F}_1 + d\vec{F}_3)$$

$$\vec{F} = I(t) B_0 [-(1+a \cdot x(t)) + (1+a(x(t)-L))] \hat{x} = -I'(t) B_0 L \hat{x} = -\frac{B_0^2 L^2 a^2}{R} V(t) \hat{x} \equiv -\frac{m}{\tau} \vec{V}(t)$$

• Equazione del moto: $\begin{cases} m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{V}(t) \\ \vec{V}(0) = V_0 \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{V}{\tau} \\ V(0) = V_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{V(t) = V_0 e^{-t/\tau}} \quad \text{con } \tau = \frac{mR}{B_0^2 L^2 a^2}$

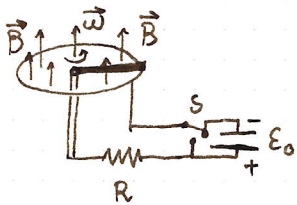
2. $Q = \int_0^{+\infty} I'(t) dt$, $I'(t) = -\left(\frac{B_0^2 L^2 a}{R}\right) V(t) = -\left(\frac{B_0^2 L^2 a}{R}\right) V_0 e^{-t/\tau}$ dalla relazione dell'eq.

quindi $Q = -\frac{B_0^2 L^2 a}{R} V_0 \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} dt = -\frac{B_0^2 L^2 a}{R} V_0 \tau = -\frac{B_0^2 L^2 a}{R} V_0 \left(\frac{mR}{B_0^2 L^2 a^2}\right) = \frac{mV_0}{B_0 L^2 a}$

controllo: $\left[\frac{mV_0}{B_0 L^2 a}\right] = \frac{MLT^{-1}}{[B] L^2 L^{-1}} = \frac{MKI^{-1}}{MK^2 L^{-1}} QI = Q \quad \text{OK!}$

$F = qv \times B \Rightarrow \frac{HK}{T^2} = Q \frac{K}{I} [B] \Rightarrow [B] = \frac{H}{QT}$

3. Bondruccia [esame 2016-02-26] Δ



• Circuito con generatore di tensione E_0 , resistenza R , moltiplicatore costante; lunghezza/raggio D , momento d'inerzia J velocità angolare $\vec{\omega}$, campo magnetico $\parallel \vec{\omega}$.

Domande: 1. $\vec{\omega}(0)=0$, generatore acceso, per $t \rightarrow \infty$ $\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}_0$

Scrivere E_0 in funzione ω_0

2. con $\vec{\omega}=\vec{\omega}_0$, generatore scollegato, $\vec{\omega}(t)=?$

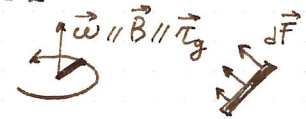
3. se $\vec{\omega}(t_1) = \frac{1}{3} \vec{\omega}_0$ e energia dissipata W , $\vec{\omega}_0=?$

1. Inizialmente $\omega=0$ $I=0$, poi $I \uparrow \Rightarrow d\vec{F}_g = I d\vec{l} \times \vec{B} \uparrow \Rightarrow d\vec{\tau}_g = d\vec{F} \times \vec{S} \uparrow \Rightarrow \vec{\omega} \uparrow$

$$d\vec{l} = \hat{s} ds \quad \vec{B} = B \hat{z} \Rightarrow d\vec{F} = I ds \hat{s} \times \hat{z} B = -I ds B \hat{\phi}$$

$$d\vec{\tau}_g = d\vec{F} \times \vec{S} = -I ds B s \hat{\phi} \times \hat{s} = IB s ds \hat{z}$$

$$\vec{\tau}_g = \int_0^D ds \frac{d\vec{\tau}_g}{ds} = \frac{1}{2} D^2 IB \hat{z} = \frac{1}{2} D^2 IB \vec{\omega}$$



quindi la bondruccia inizia a ruotare, senso antiorario.

• Ma c'è anche l'effetto dell'induzione dato da $\omega \neq 0$:

$$E_1 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^D ds [(\vec{\omega} \times \vec{S}) \times \vec{B}] \cdot \hat{s} = \int_0^D ds (\hat{\phi} \times \hat{z}) \cdot \hat{s} B s \omega = \frac{1}{2} D^2 B \omega$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R} = \frac{\omega D^2 B}{2R} \propto \omega$$

$$I_1 \Rightarrow d\vec{F}_i \Rightarrow d\vec{\tau}_i = d\vec{F}_i \times \vec{S} = -I_1 B s ds \hat{z} \Rightarrow \vec{\tau}_i = -\frac{D^4 B^2}{4R} \vec{\omega}$$

• L'eq del moto angolare diventa quindi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_g + \vec{\tau}_i$$

↑ generatore induzione / attrito

↳ momento angolare $\vec{L} = J\vec{\omega}$

con $\vec{\tau}_g = \text{const}$, ma $\vec{\tau}_i \propto \vec{\omega}$

$\vec{L}, \vec{\tau}_g, \vec{\tau}_i \parallel \hat{z} \rightarrow 1D$, sostituiamo $\vec{L} = J\dot{\omega}$ e facciamo $(\cdot \hat{z})$:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_g - \frac{D^4 B^2}{4R} \omega \Rightarrow \dot{\omega} + \frac{\omega}{T} = \alpha \quad \text{dove } T = \frac{4RJ}{D^4 B^2}, \alpha = \frac{\tau_g}{J} = \frac{D^2 \epsilon_0 B}{2J} = \frac{D^2 \epsilon_0 B}{2JR}$$

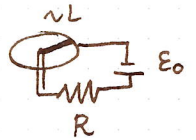
• $\omega \propto e^{\lambda t} \Rightarrow$ polinomio caratteristico $p(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{T} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{T}$

La soluzione omogenea è $\tilde{\omega}(t) = \alpha e^{-t/T}$, sostituiamo nell'eq. completa:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\omega}} &= -\frac{\alpha}{T} e^{-t/T} + \dot{\alpha} e^{-t/T} \\ \frac{\tilde{\omega}}{T} &= \frac{\alpha}{T} e^{-t/T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\alpha} e^{-t/T} = \alpha \Rightarrow \alpha = b + \alpha T e^{t/T} \Rightarrow \omega(t) = b e^{-t/T} + \alpha T$$

metodo della variazione delle costanti, Lagrange

• Problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{\omega} + \frac{\omega}{T} = c \\ \omega(0) = 0 \end{cases}$ (inizialmente è ferma)



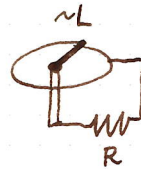
segue: $\omega(0) = b + \alpha T = 0 \Rightarrow b = -\alpha T$ e la soluzione è $\omega(t) = \alpha T (1 - e^{-t/T})$

Sostituendo tutto si ottiene: $\omega(t) = \frac{2\epsilon_0}{D^2 B} (1 - e^{-t/T})$ con $T = \frac{4RJ}{D^4 B^2}$.

• La risposta al punto 1 è $\omega(+\infty) = \omega_0 = \frac{2\epsilon_0}{D^2 B} \Rightarrow \boxed{\epsilon_0 = \frac{1}{2} D^2 B \omega_0}$

2. Nuovo problema di Cauchy, stavolta $\tau_g = 0$ ($\alpha = 0$), ma $\omega(0) = \omega_0$.

$$\begin{cases} \dot{\omega} + \frac{\omega}{T} = 0 \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 e^{-t/T}} \text{ facile!}$$



3. Si può fare in due modi: 1. $W = \int_{t_0}^{t_1} P dt$ con $P(t) = R I_L^2(t)$

$$2. \Delta \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = W$$

3.1 $W = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt = \int_{\omega_0}^{\omega_0/3} P(\omega) \frac{dt}{d\omega} d\omega$, usando $P = R I_L^2 = \left(\frac{D^4 B^2}{4R} \right) \omega^2$ e $\frac{dt}{d\omega} = \frac{1}{\dot{\omega}} = \frac{T}{\omega}$

$$= \int_{\omega_0}^{\omega_0/3} \left(\frac{D^4 B^2}{4R} \right) \omega^2 \frac{T}{\omega} d\omega = J \int_{\omega_0}^{\omega_0/3} \omega d\omega = \frac{1}{2} J \omega^2 \Big|_{\omega_0}^{\omega_0/3}$$

$\hookrightarrow J/T$

$$= \frac{1}{2} J \left[\left(\frac{\omega_0}{3} \right)^2 - \omega_0^2 \right] = \frac{1}{2} J \omega_0^2 \left(-\frac{8}{9} \right) = -\frac{4}{9} J \omega_0^2$$

3.2 $W = \Delta \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{1}{2} J \omega^2 \Big|_{\omega_0}^{\omega_0/3} = -\frac{4}{9} J \omega_0^2$

Quindi $\omega_0^2 = -\frac{9}{4} \frac{W}{J} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{|W|}{J}}}$