# Programma d'esame definitivo del corso di Analisi Matematica I

**a.a. 2025/2026**

M. Garavello G. Guerra S. Secchi

**Insiemi numerici** Numeri naturali, interi e razionali. Simboli di sommatoria, produttoria e fattoriale. Principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli. Coefficienti binomiali e potenza del binomio. Campi e campi ordinati. Irrazionalità di radice di 2. Estremo superiore e estremo inferiore. Assioma di continuità. Definizione di $\mathbb{R}$ come campo ordinato verificante l'assioma di continuità. Proprietà di Archimede. Parte intera, parte frazionaria e valore assoluto di un numero reale. Densità dei numeri razionali e dei numeri irrazionali in $\mathbb{R}$. Costante di Nepero.

**I numeri complessi.** Definizione, forma algebrica, modulo, complesso coniugato, parte reale e parte immaginaria, disuguaglianza triangolare. Forma trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso, prodotto e potenza in forma trigonometrica/esponenziale. Esponenziale complesso. Radici $n$–esime di un numero complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).

**Funzioni.** Definizione, dominio, codominio, grafico, immagine e controimmagine. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Restrizioni di funzioni. Funzione composta e funzione inversa. Funzioni reali di variabile reale e loro grafico. Estremo superiore, inferiore, massimo e minimo di una funzione. Punti di massimo e punti di minimo. Funzioni monotone, periodiche, pari e dispari. Funzioni elementari e loro grafici.

**Limiti.** Punti di accumulazione e punti isolati per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Definizione di limite. Unicità del limite, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto (dei due carabinieri). Limite della somma, del prodotto, del rapporto e della funzione composta. Forme indeterminate. Limiti notevoli. Limiti destro e sinistro. Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Confronti asintotici, simboli di $o$ piccolo e $O$ grande. Infiniti, infinitesimi e loro confronto.

**Successioni reali.** Successioni, sottosuccessioni e limiti di successioni. Successioni convergenti, divergenti e oscillanti. Limitatezza delle successioni convergenti. Sottosuccessioni. Teorema di Bolzano–Weierstrass. Successioni monotone; il limite della successione $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$ è il numero $e$ (costante di Nepero). Successioni di Cauchy. Criterio di Cauchy. Limite inferiore e limite superiore.

**Continuità.** Definizione di funzione continua. Continuità della funzione composta. Teorema della permanenza del segno per funzioni continue. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Continuità della funzione inversa. Continuità delle funzioni elementari. Teorema ponte. Teorema di Weierstrass. Continuità uniforme. Continuità uniforme di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati (Heine–Cantor). Funzioni Lipschitziane.

**Serie.** Definizione. Serie convergenti, divergenti e irregolari (oscillanti, indeterminate). Serie geometrica, serie di Mengoli e serie telescopiche. Condizione necessaria per la convergenza. Serie assolutamente convergenti e criterio della convergenza assoluta. Serie a termini positivi: criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio della radice e criterio del rapporto. Serie a termini di segno alternato. Criterio di Leibniz.

**Calcolo differenziale.** Retta tangente al grafico di una funzione. Differenziabilità e derivabilità. Derivata destra e sinistra. Punti angolosi, punti a tangente verticale e cuspidi. Continuità delle funzioni derivabili. Regole di derivazione: somma, prodotto, quoziente. Derivata della funzione composta e derivata della funzione inversa. Derivata delle funzioni elementari. Punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti. Teoremi di Fermat, di Rolle, di Cauchy e di Lagrange. Derivata limitata e Lipschitzianità. Funzioni con derivata nulla. Relazioni tra monotonia di una funzione e segno della sua derivata. Teorema di De l'Hôpital. Derivate successive. Convessità/concavità di una funzione. Relazione tra il segno della derivata seconda e concavità/convessità di una funzione. Punti di flesso e valore della derivata seconda nei punti di flesso. Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui. Formule di Taylor e di McLaurin con resto in forma di Peano. Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange. Sviluppi di McLaurin delle funzioni elementari.

**Calcolo integrale.** Funzioni a scala (o costanti a tratti o semplici) e integrale di funzioni a scala. Linearità e monotonia dell'integrale delle funzioni a scala. Integrale inferiore e integrale superiore su un intervallo limitato. Definizione di integrabilità secondo Riemann. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità. Linearità e monotonia (confronto) dell'integrale di Riemann. Integrabilità della parte positiva/negativa e del modulo di una funzione integrabile e relativa disuguaglianza. Integrabilità della restrizione di una funzione integrabile, additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione. Integrabilità delle funzioni continue. Integrale su intervalli orientati e additività rispetto al dominio. Teorema della media integrale. La funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Funzioni primitive, integrale indefinito. Integrazione per parti e per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali fratte. Integrali impropri: definizione, criterio del confronto, criterio della integrabilità del valore assoluto e criterio del confronto asintotico.

**Testo di riferimento**

- E. Giusti: *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri.

**Altri testi consigliati.**

- G. De Marco: *Analisi Uno*, Zanichelli Decibel.
- C. D. Pagani, S. Salsa: *Analisi matematica 1*, Zanichelli.

**Eserciziari consigliati.**

- E. Giusti: *Esercizi e complementi di analisi matematica, volume 1*, Bollati Boringhieri.
- G. De Marco, C. Mariconda: *Esercizi di calcolo in una variabile*, Zanichelli Decibel.
- S. Salsa, A. Squellati: *Esercizi di analisi matematica 1*, Zanichelli.
- Per problemi con difficoltà più elevata: E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo: *Problemi scelti di analisi matematica. Vol. 1*, Liguori.

## Selezione delle dimostrazioni richieste nella seconda parte della prova scritta

1. Il campo dei numeri reali possiede la proprietà di Archimede.
2. Derivazione della formula per le radici $n$–esime di un numero complesso.
3. Disuguaglianza triangolare in $\mathbb{C}$.
4. Teorema di Bolzano–Weierstrass: da ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.
5. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: all'interno di ogni intervallo $(a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ sono contenuti infiniti numeri razionali.
6. Unicità del limite, permanenza del segno, limite di somma e del prodotto.
7. Teorema del confronto o dei due carabinieri.
8. Esistenza del limite per funzioni monotone.
9. Continuità della funzione composta.
10. Teorema degli zeri, teorema dei valori intermedi.
11. Criterio di Cauchy: ogni successione reale è di Cauchy se e solo se è convergente.
12. Condizione necessaria per la convergenza di una serie: se una serie è convergente, il suo termine generale tende a zero.
13. Criteri di convergenza per serie a termini positivi (radice, rapporto).

14. Criterio della convergenza assoluta: se una serie converge assolutamente allora è convergente.
15. Teorema di Weierstrass.
16. Continuità delle funzioni derivabili.
17. Regole di derivazione: somma, prodotto.
18. Derivata delle funzioni elementari: esponenziale, logaritmo, seno, potenze, tangente, arcotangente e arcoseno.
19. Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange e di Cauchy.
20. Le funzioni a derivata nulla su intervalli sono costanti. Le funzioni a derivata limitata su intervalli sono Lipschitziane.
21. Relazioni tra monotonia di una funzione e segno della sua derivata.
22. Relazione tra derivata seconda e flessi di una funzione.
23. Integrabilità delle funzioni continue.
24. Teorema della media (integrale).
25. Teorema fondamentale del calcolo.
26. Integrazione per parti e per sostituzione.