

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Analisi Matematica I – Prova scritta del 30.01.2018**Parte A****Esercizio 1.** Determinare tutte le soluzioni della seguente equazione in campo complesso

$$z^2 + z\bar{z} = 2 + i.$$

Punteggio	Risposta
5 punti	$1 + \frac{1}{2}i, \quad -1 - \frac{1}{2}i$

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \arctan \sqrt{|x-1|} + \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}$.

Domanda	Punteggio	Risposta
a) Quanto vale $f'(2)$?	1 punto	$1/2$
b) Qual è l'insieme dei punti di derivabilità di f ?	2 punti	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$
c) Esiste l'asintoto obliquo di f per $x \rightarrow +\infty$? In caso affermativo, scriverne l'equazione.	2 punti	$y = x/4 + \pi/4$

Esercizio 3. Sia, per ogni $s \in (0, +\infty)$, $F(s) = \int_1^s \frac{1}{\log^2 x + 4} \frac{dx}{x}$.

Domanda	Punteggio	Risposta
a) Quanto vale $F(1)$?	2 punti	0
b) Quanto vale $F(2)$?	2 punti	$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\log 2}{2}\right)$
c) Quanto vale il limite $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s)$?	1 punto	$\pi/4$

Parte B

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ dipendente dal parametro reale positivo $\alpha > 0$ definito da:

$$A_\alpha = \left\{ n^{\alpha^2+4} \left(1 - \cos \frac{1}{n^{2\alpha}} \right) \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Domanda	Punteggio	Risposta
a) Per quali α si ha $\inf A_\alpha > 0$?	3 punti	$0 < \alpha \leq 2 - \sqrt{2} \vee \alpha \geq 2 + \sqrt{2}$
b) Per quali α si ha $\sup A_\alpha < +\infty$?	2 punti	$2 - \sqrt{2} \leq \alpha \leq 2 + \sqrt{2}$

Esercizio 5. Si considerino le due funzioni

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x + \log(1+x) - x, \quad g(x) = e - (1+x)^{\frac{x+2}{2x}}.$$

Domanda	Punteggio	Risposta
a) Qual è l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$?	2 punti	3
b) Qual è l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ per $x \rightarrow 0$?	2 punti	2
b) Quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xg(x)}$?	1 punto	$-\frac{4}{e}$

Cognome:..... Nome:.....Matricola:.....

Parte C

Esercizio 6. Siano $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = \begin{cases} (\log |x|)(1 + \log(\log |x|)), & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ 0, & \text{se } x = -1 \text{ o } x = 1. \end{cases}$$

- i) Si stabilisca in quali punti di D la funzione f è continua e si calcolino (qualora esistano) i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$.
- ii) Si stabilisca in quali punti di $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ la funzione f è derivabile. Si discutano inoltre la derivabilità da destra in $x = 1$ e la derivabilità da sinistra in $x = -1$.
- iii) Si discuta l'esistenza di punti di massimo e di punti di minimo relativi e assoluti di f .
- iv) Si dimostri che la restrizione di f a $(1, +\infty)$ ha esattamente un punto di flesso.
- v) Si stabilisca se f è uniformemente continua e se f è lipschitziana.

Le risposte devono essere chiare, concise e adeguatamente motivate; risposte non motivate non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione.